Recepción: **Febrero 25, 2024** | Aceptación: **Junio 24, 2025** | Publicación: **Octubre 1, 2025**

Diseño de Situación Didáctica con Pensamiento Lateral para Favorecer el Aprendizaje de la Sumatoria de Riemann

Design of a Didactic Situation with Lateral Thinking to Favor the Learning of the Riemann Sum

—

Erivan Velasco Núñez
erivan.velasco@unach.mx
ORCID: 0000-0001-7202-8924

Luis-Alan Acuña-Gamboa
luis.gamboa@unach.mx
ORCID: 0000-0002-8609-4786

Universidad Autónoma de Chiapas,
Tuxtla Gutiérrez Chiapas, México

Para citar este artículo:

Velasco Núñez, E., & Acuña Gamboa, L. A. Diseño de Situación Didáctica con Pensamiento Lateral para Favorecer el Aprendizaje de la Sumatoria de Riemann. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 14*(42). https://doi.org/10.31644/IMASD.42.2025.a05

RESUMEN

El objetivo fue diseñar una situación didáctica que incorpora la inversión, elemento teórico del pensamiento lateral, y la visualización de gráficos dinámicos con GeoGebra. La metodología se basó en cinco Momentos que conducen al estudiante a construir argumentos entorno a la sumatoria de Riemann. Los resultados muestran que el diseño permite desarrollar un instrumento que plantea una construcción cognitiva entorno al objeto matemático que se contrasta con la forma acabada y abstracta de presentarla por los libros que sugiere el programa analítico para la materia de Cálculo Integral de la Licenciatura en Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas.

Palabras clave:

Pensamiento lateral, visualización en GeoGebra, sumatoria.

— Abstract—

A design proposal is presented for a teaching situation that incorporates inversion, a theoretical element of lateral thinking, and the visualization of dynamic graphics using GeoGebra. Methodologically, it is based on five moments that lead the student to construct arguments around the Riemann summation. This instrument successfully constructs a cognitive construction around the mathematical object, contrasting with the way it is presented in the books suggested by the analytical program for the Integral Calculus course in the Civil Engineering degree program at the Autonomous University of Chiapas.

Keywords:

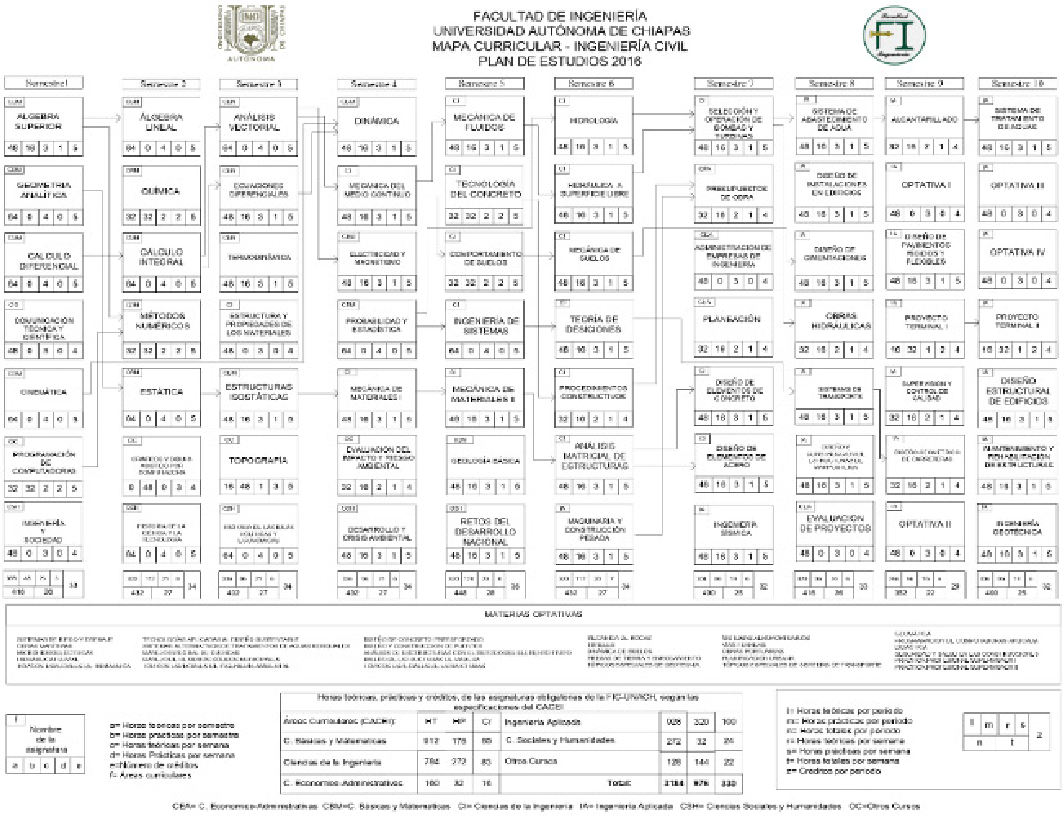
Lateral thinking, visualization in GeoGebra, summation.

En la Facultad de Ingeniería (FI) de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH) se oferta la Licenciatura en Ingeniería Civil (IC), la cual en los primeros semestres se imparten materias con un contenido matemático, como se observa en la Figura 1. El Plan de Estudios (PE) de la licenciatura en IC, tiene un enfoque centrado en la educación por competencias, lo que permite que el alumno cuando egrese pueda movilizar e integrar diversos conocimientos y recursos cognitivos cuando se enfrente a una situación o problema nuevo en su lugar de trabajo, para que sea capaz de enfrentar dicha situación, con un conocimiento construido, proponiendo una solución adecuada y tomar la decisión más pertinente en torno a posibles cursos de acción, haciéndolo de manera efectiva, y teniendo presente su capacidad para resolver problemas complejos y abiertos, en diferentes escenarios y momentos.

La licenciatura en IC contribuye a la formación de profesionales en la Ingeniería a través de una trayectoria escolar de 10 semestres. Para lograr la formación integral de la comunidad estudiantil se han diseñado unidades de competencia en diversas áreas de formación, tales como formación para la vida, formación básica y formación profesional.

Además, se cuentan con unidades de competencia optativas que la comunidad estudiantil puede cursar en la FI, o bien, en otros programas educativos de la Universidad o Instituciones de Educación Superior (IES) nacionales e internacionales.

Sin embargo, centraremos la propuesta de diseño en un contenido matemático que se denomina Sumatoria de Riemann en la unidad de competencia llamada Cálculo Integral (mostrada en el círculo de la Figura 1) correspondiente al segundo semestre de la licenciatura de IC.



Nota. UNACH (2016a).

Figura 1. Mapa curricular del plan de estudios 2016

En la UNACH, los programas analíticos de cada unidad de competencia han sido construidos de tal manera que contribuyan al desarrollo de atributos de competencia, que se articulan al perfil del egreso: conocimientos, habilidades, actitudes y valores. El plan y programa de estudios de la licenciatura en IC responde a las necesidades y problemáticas de la sociedad actual, así como a otros emergentes en el campo de la aplicación de la IC en diversos ámbitos.

Dentro del vigente PE del 2016 se cuenta con la unidad de competencia de Cálculo Integral, cuyo propósito es desarrollar en el alumno un pensamiento matemático basado en la modelación de fenómenos de variación en distintos contextos propios de la IC, para que la comunidad estudiantil pueda inferir relaciones y resultados del Cálculo a través de una variedad de contextos reales. También para que analice y razone, utilizando nociones y procedimientos propios del Cálculo, argumentando adecuadamente una toma decisiones y estrategias de solución al resolver problemas. Finalmente, pueda comunicar de manera eficaz las soluciones que construya.

Como parte de los contenidos de Cálculo Integral, se encuentra la subcompetencia denominada *Integral definida*, la cual es la primera en el programa analítico. En su contenido están las sucesiones y series, área e integral definida (propiedades y su respectivo cálculo).Toda esta estructura está enfocada en calcular áreas bajo las gráficas de funciones continuas y sobre el eje “x”. La intencionalidad de este contenido es la de comprender lo que es una sucesión para luego construir series de expresiones o de figuras y a partir de estas series, construir un área bajo una curva (para después incorporar a una función) y por encima de una referencia (para después llamarlo eje “x” en un sistema de referencia). La subcompetencia organiza los contenidos de una manera secuencial para llegar a la integral definida, la cual utiliza las series para determinar el área evaluando en la antiderivada con los valores inicial y final del intervalo.

CRITERIOS DE DESEMPEÑO (APRENDIZAJES ESPERADOS)	CONTENIDOS
• Calcula áreas bajo la gráfica, áreas entre gráficas, encuentra la integral definida de diferentes funciones aplicando las sumas de Riemann.	**INTEGRAL DEFINIDA** Sucesiones y series. Área. Integral definida. Propiedades de la integral definida. Cálculo de integrales definidas.

Nota. UNACH (2016b, p.151).

Figura 2. Contenido de la subcompetencia (unidad) de Cálculo Integral

Por otro lado, en el caso del contenido *Área* se incorpora un objeto matemático denominado sumatoria de Riemann, el cual un libro de cálculo la define como se observa en la Figura 3.

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdot \cdot \cdot < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es *cualquier* punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

se denomina una **suma de Riemann** de f para la partición Δ.

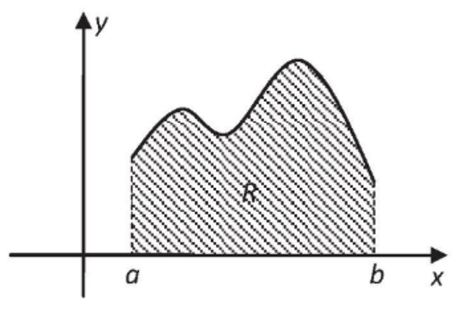
Nota. Larson y Edwards (2010, p. 272).

Figura 3. Extracto de un libro de cálculo donde se aprecia la definición de sumatoria de Riemann

La anterior definición tiene implícito el cálculo del área de un rectángulo (el cual estaría considerado por debajo de la curva), donde Δx_i sería la base y el valor $f(c_i)$ sería la altura del mismo. Según una referencia del programa analítico de Cálculo Integral del PE 2016, Stewart (2010, pp. 343-344), la definición mostrada en la Figura 3 es usada en otra para el proceso del cálculo del área bajo la curva. Esta otra definición establece a la integral definida como un límite con tendencia al infinito para la sumatoria de Riemann.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_i^n f(x_i^*)\Delta x$$

De hecho, Acosta (2012) menciona que en los textos que se utilizan en la práctica docente, y en la enseñanza del cálculo predomina el enfoque de introducir el concepto de integral definida de una función $y = f(x)$, que es continua y no negativa en un intervalo cerrado $[a,b]$, en estrecha relación con el problema de la determinación del área del trapecio curvilíneo correspondiente, como se observa en la Figura 4.



Nota. Acosta (2012, p. 343).

Figura 4. La integral definida de la función y = f(x), continua y no negativa en [a,b], es numéricamente igual a la medida del área de la región R

Sin embargo, todo este enfoque consigue invisibilizar la relación del pensamiento matemático que puede emerger en la modelación de fenómenos de variación en distintos contextos propios de la IC. ¿Dónde queda el inferir relaciones y resultados del Cálculo a través de una variedad de contextos reales? El estudiante llega a plantear que todo lo que se le enseñó en la subcompetencia es nada más para justificar el uso de un algoritmo para la integral definida. Y que solo basta con usar las expresiones en serie de potencia que corresponden a funciones determinadas, obtener la antiderivada y conseguir el resultado del valor del área bajo la curva al hacer la evaluación. Todo esto lleva a comentar que en la FI de la UNACH se privilegia la aplicación de un procedimiento algorítmico sin una contextualización de la sumatoria de Riemann.

En este sentido, Granera (2019) señala que “en matemática, existe poca visualización y contextualización de las propiedades de los conceptos; así como, poca vinculación cognitiva de aspectos gráfico-visuales y analítico–algorítmicos de los mismos” (p. 5).

Con respecto a lo señalado de privilegiar la enseñanza de la sumatoria de Riemann en el uso de un algoritmo para la integral definida, coincide con lo siguiente.

> Salinas y Alanís (2009) mencionan que la enseñanza tradicional del Cálculo propicia que los docentes centremos la evaluación en la capacidad que logran los estudiantes para aplicar algoritmos y procesos algebraicos en la resolución de ejercicios. (Granera, 2019, p. 4)

Se debe señalar que la enseñanza debe tratarse de un acto consciente e intencional, por parte del docente, quien pretende la consecución de un aprendizaje a través de una serie de acciones que propicien que el estudiante construya su conocimiento a partir de la modelación de fenómenos de variación en distintos contextos propios de la IC. En este sentido, la propuesta de diseño que se presenta en este escrito incorporó a la inversión un elemento del pensamiento lateral. Ya que, en lugar de presentar la expresión analítica, como lo hacen los libros de cálculo, se les solicita a los estudiantes que construyan una aproximación de área en una figura regular, después en una figura irregular, para finalmente aproximar un área en una curva obtenida experimentalmente en un contexto relacionado con la IC, como lo es en las pruebas mecánicas de resistencia en blocks huecos de concreto (BHC).

Se considera que se incorpora la inversión ya que en toda la interacción en ningún momento se le presenta al estudiante una estructura analítica al cual, él o la estudiante, recurra a aplicar algoritmos y procesos algebraicos. Todo se basa en aproximaciones de área propias de cada individuo al interactuar con la propuesta de diseño. Cada momento de cierre en las actividades plantea al final que se obtenga una expresión analítica a partir de la interacción con las partes que integran la actividad.

Se planteó que la inversión también está implícita en la actividad que involucra a la actividad de la construcción y una prueba mecánica de los BHC. Ya que al solicitar el área por debajo de la curva experimental esfuerzo-deformación, sin dar una expresión analítica para la función, hará que los estudiantes recurran a estrategias de aproximación para esa región. Esa superficie contextualizada alude a la capacidad de absorción de energía que tiene la muestra antes de colapsarse (Beer et al., 2010, pp. 670-671).

Por otro lado, el incorporar el uso de GeoGebra para la construcción de las aproximaciones de las áreas permite a los estudiantes una relación entre distintos registros de representación en torno de la sumatoria de Riemann.

> GeoGebra posee algunos registros de representación como la vista algebraica, la vista de cálculo simbólico CAS, las vistas gráficas en dos y tres dimensiones,

> entre otras. Estas representaciones optimizan el tiempo y permiten mostrar una variedad de comportamientos del objeto en estudio lo que será difícil de obtener por medio de la representación gráfica con lápiz y papel. (Vergara, 2022, p. 2)

También se consideró que implementar GeoGebra tendrá un impacto en la visualización dinámica en la aproximación del área bajo la curva, ya que es un software que tiene un grado de incidencia en la enseñanza-aprendizaje de objetos matemáticos pertenecientes al Cálculo Integral. En ese sentido, según Laderas et al (2023):

> El uso de GeoGebra tuvo un impacto significativo en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial e integral en estudiantes de educación superior. GeoGebra demostró ser una herramienta eficaz tanto en la enseñanza general de las matemáticas como en la de Cálculo específico. (p. 374)

Con esta problemática inicial que se construyó para la sumatoria de Riemann, se planteó desarrollar en GeoGebra registros de representación o modelos, tanto geométricos como analíticos y numéricos en los que se garanticen una aproximación al área bajo la curva en un intervalo $[a,b]$. Así como una contextualización en aplicaciones de la IC, que a partir de la modelación de una curva esfuerzo-deformación se realice un acercamiento al área por debajo de la curva experimental desde una deformación cero hasta el momento de ruptura. La propuesta de diseño aún no se ha aplicado a un grupo de estudiantes y se planea que eso ocurra en la temporalidad agosto-diciembre del 2025 en la FI de la UNACH.

PROPÓSITOS DE LA PROPUESTA DE DISEÑO

El propósito de la propuesta de diseño como un *medio* fue favorecer el aprendizaje de la sumatoria de Riemann, utilizando el pensamiento lateral en una propuesta que incorpora a la tecnología y el aprendizaje basado en problemas. Se comprende el medio en el sentido que Sadovsky (2005) lo interpreta:

> El concepto de medio incluye entonces tanto una problemática matemática inicial que el sujeto enfrenta, como un conjunto de relaciones, esencialmente también matemáticas, que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa. (p.20)

Se consideró que en el estudiante emergerán las competencias que se mencionan en el programa analítico de la materia de Cálculo Integral. A continuación, se señalan las competencias que se favorecen:

- Utilizar los lenguajes lógico, formal, matemático, icónico, verbal y no verbal para comprender, interpretar y expresar ideas y teorías.
- Manejar las tecnologías de la información y la comunicación como herramienta para el aprendizaje y trabajo colaborativo que le permitan su participación constructiva en la sociedad.
- Emplear pensamiento lógico, crítico, creativo y propositivo para analizar fenómenos naturales y sociales que le permitan tomar decisiones pertinentes en su ámbito de influencia con responsabilidad social. (UNACH, 2016b, pp. 149-150)

Aprendizajes esperados

Que el estudiante identifique la composición de un área bajo la curva mediante figuras geométricas como lo son los rectángulos. Dicha composición es una aproximación al área entre la curva "$f(x)$" y el eje "x".

Conocimientos previos

Áreas de figuras (rectángulos, cuadrados, triángulos y círculos), posicionamiento, plano de referencia.

¿Con quiénes se va a trabajar?

Para este proyecto de intervención nuestro objeto de estudio son los jóvenes entre una edad de 18 a 20 años, provenientes de las diversas localidades del estado de Chiapas. En el segundo semestre de la licenciatura en IC, se aplicaría en la primera sub-competencia de la unidad de competencia llamada "Cálculo Integral" tal y como lo marca el programa analítico para dicha materia.

Pregunta de investigación

De todo lo anterior se desprendió una pregunta de investigación: ¿Cómo una secuencia didáctica basada en la incorporación del pensamiento lateral y la visualización en GeoGebra favorece el aprendizaje de la sumatoria de Riemann en el segundo semestre de la licenciatura en IC?

OBJETIVO GENERAL

Diseñar una secuencia-didáctica que incorpore el pensamiento lateral en el aprendizaje de la sumatoria de Riemann, incorporando GeoGebra y el aprendizaje basado en problemas.

Objetivos particulares

- Se plantea incorporar la inversión en el diseño de la secuencia didáctica el enfoque que he denominado regular-regular, el cual consiste en que un área regular se puede constituir aproximadamente con infinitas áreas regulares (rectángulos).
- Se incorpora la inversión en el diseño de secuencia didáctica el enfoque que se ha denominado irregular-regular, el cual consiste en que un área irregular se puede constituir aproximadamente con infinitas áreas regulares (triángulos, rectángulos, cuadrados, círculos u otros).
- Se proponen actividades que incorporen la metodología del aprendizaje basado en proyectos para la construcción de block huecos de concreto y el modelado de la curva esfuerzo-deformación unitaria.

MARCO CONCEPTUAL

Se considera que la propuesta de problemática inicial o situación problema tiene dos componentes teóricos: el pensamiento lateral, por un lado; y la visualización de gráficos con la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, por otro.

Pensamiento lateral

Para generar el razonamiento a partir de las matemáticas, una estrategia es el pensamiento lateral. Este concepto está en contraposición al denominado pensamiento vertical, causa-efecto tradicional. Sus bases consisten en tener un enfoque "alejarse del dar por pensado" y en la provocación. Por otro lado, el pensamiento lateral, “llamado también pensamiento divergente, considerado por muchos autores como sinónimo de pensamiento creativo, que implica riesgo y aventura, busca soluciones o metas diversas en cada individuo, propias y originales” (López, 2010 en Muñoz, 2013, p. 269).

Para aplicarlo existen distintas técnicas (para el caso de problemas), entre las cuales una de ellas se denomina *Inversión*, que consiste en invertir el sentido del problema y se intenta convertirlo en exactamente algo opuesto. Es decir, se intenta “girarlo”. La idea es dar con algo nuevo que aporte a la solución del problema original (De Luca, 2012).

Consideramos relevante invertir la forma en que se visualiza la sumatoria de Riemann en un curso de cálculo. Donde por lo general, se presenta la formula ya terminada como se discutió en el apartado de la introducción de este escrito, y se aplica a un ejemplo tipo que desarrolla esa fórmula establecida por el texto utilizado por el docente.

Incorporación de la tecnología

El hacer uso de la tecnología en el aula de matemáticas permite a los estudiantes buscar formas creativas de resolver los problemas, ya que estos pueden centrar la discusión en el significado de las ideas matemáticas involucradas en los procedimientos y resultados, porque las herramientas digitales pueden realizar los cálculos y procedimientos matemáticos (Santos, 2015, p. 149).

Es aquí donde entra el papel del docente, ante estas premisas, el hacer uso del pensamiento lateral con la incorporación de la tecnología puede coadyuvar a que los estudiantes busquen formas creativas de resolver problemas en clase y no ejercicios repetitivos. Coincidiendo con la propuesta de Brousseau (1988, en Sadovsky, 2005):

> El trabajo del docente consiste pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro. (p.28)

Ya que el docente puede buscar y encontrar herramientas como GeoGebra. Que permitan a la propuesta de diseño para la sumatoria de Riemann una visualización de los efectos que pueden ocurrir entre los distintos registros de representación de este objeto matemático. Y observar en tiempo real los efectos de la variación de los elementos de un registro a otro.

Por todo esto, se consideró que la implementación de la tecnología, para la propuesta de diseño de la sumatoria de Riemann, es algo viable.

Visualización

Se consideró que al incorporar la tecnología mediante el software GeoGebra, permite la manipulación en tiempo real de objetos geométricos, un factor que favorecerá a la visualización y contextualización de las propiedades de la sumatoria de Riemann. En este sentido, Granera (2019) señaló lo siguiente:

> Los diagnósticos de investigaciones realizadas muestran que los aprendizajes conceptuales y de aplicación son escasos. Principalmente en matemática, existe poca visualización y contextualización de las propiedades de los conceptos; así como, poca vinculación cognitiva de aspectos gráfico-visuales y analítico–algorítmicos de los mismos. (p. 5)

Por otro lado, desde la teoría de *Humanos-con-Medios* se valoró el protagonismo de la tecnología en la reorganización de conocimiento matemático, considerándola estrechamente ligada a la *visualización*, un proceso cognitivo que apoya la representación, generalización, transformación, documentación, reflexión y comunicación sobre la base de información visual (Hershkowitz et al, 1990; y Torregrosa, 2002, citados en Díaz-Urdaneta y Prieto, 2016).

Díaz-Urdaneta y Prieto (2016) mencionaron que en la simulación con GeoGebra, la *visualización* es concebida como un proceso cognitivo a través del cual se representan un fenómeno (natural o científico) seleccionado, utilizando ideas matemáticas (en diferentes registros) que son ampliadas o reorganizadas durante el desarrollo de la actividad.

Finalizamos este apartado señalando que consideramos que estos componentes teóricos, el pensamiento lateral y la visualización con la incorporación de la tecnología, se complementan de una manera adecuada en el diseño de nuestra situación problema.

RESULTADOS

Como resultado se ha obtenido un instrumento para favorecer el aprendizaje de la sumatoria de Riemann que plantea una construcción del objeto matemático, incorporando la inversión, enfoque teórico del pensamiento lateral, y la visualización de gráficos dinámicos con GeoGebra.

METODOLOGÍA DE LA SITUACIÓN PROBLEMA

La propuesta es una secuenciación de instrucciones (*medio*) para los estudiantes, la cual está pensada en cinco Momentos en un formato de inicio-desarrollo y cierre, planteado por Díaz (2013).

En un primer momento, se plantea trabajar con un rectángulo inscrito, circunscrito o como una combinación de ambas características y usando un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como lo es GeoGebra. En un segundo momento, se pretende continuar con el uso de la tecnología (software) y se pone énfasis en determinar el número adecuado de rectángulos para calcular un área propuesta. En un tercer momento, se utilice un proyecto que refleje el tránsito de una figura irregular a una regular. En un cuarto momento, de cierre de los momentos uno, dos y tres, el cual responde a un paradigma denominado como concepción moderna del cálculo, sobre este modelo Moreno y Ríos (2006) señalaron:

> Esta concepción habla de un aprendizaje como construcción de significados para que el estudiante construya el conocimiento basándose en su bagaje cultural y en las orientaciones provenientes del profesor. que ya no es visto como un transmisor de saberes, sino como el otro participante del proceso de aprendizaje que junto al alumno construye el conocimiento, lo cual significa que su actividad se dirige a promover la organización, interpretación y comprensión

> del material informativo para que sea el mismo estudiante el que decida el qué y el cómo de lo que aprende.
>
> Desde esta óptica los saberes matemáticos no se consideran como algo acabado sino como conocimientos en plena creación que se sustentan en una práctica pedagógica como la promovida en la concepción moderna, que por arriba del almacenamiento de conceptos coloca las estructuras conceptuales que se amplían y potencian a lo largo de toda la vida, de modo que no es suficiente con las clases expositivas, sino que deben crearse escenarios donde los alumnos participen en la elaboración de sus propios aprendizajes. (pp. 33-34)

En un quinto momento, se finalizaría toda la intervención al incorporarse, basado en proyectos, podría gestar que el docente se convierta en ese otro participante del proceso de aprendizaje y junto con el estudiante construyan el conocimiento matemático.

Los Momentos 1 y 2 consideran la construcción de una figura regular que es la semicircunferencia con figuras regulares como los rectángulos. El Momento 3 considera la construcción de una figura irregular, como la hoja de helecho romanesco; con figuras geométricas regulares, como los triángulos, rectángulos, cuadros o círculos. El Momento 4 considera dar el cierre a estas dos formas de construir. El Momento 5 finalizaría toda la intervención con los estudiantes. Cabe señalar que la secuencia didáctica obtenida fue el resultado de la validación de un corpus de cinco docentes-investigadores, a quienes se les presentó la metodología basada en Momentos y la propuesta de secuencia didáctica. Ellos vertieron sus comentarios y lo que se muestra en el apartado de resultados es la versión final.

Momento 1

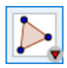
Discusión sobre la implementación de la forma del área de un rectángulo que pueden usarse para determinar otra área (la del túnel), bajo el supuesto que no conociéramos que el túnel es el contorno de un círculo. Se hizo uso del pensamiento lateral al invertir la forma de ver a la sumatoria de Riemann como lo hacen los libros de texto al presentar la figura construida. Se les proporcionó un archivo en GeoGebra donde con ayuda de los deslizadores ellos pudieran manipular el número de rectángulos que aparecen bajo el túnel, así como el punto de corte de la parte superior del rectángulo con la $f(x)$ desconocida.

Momento 2

Después de discutir la posición del rectángulo con respecto a la curva que conviene usar del Momento 1, en este Momento 2 y en un segundo archivo en GeoGebra (en el archivo solo estará el semicírculo), pudieron emerger propuestas por parte de los estudiantes sobre el número de rectángulos que mejor convenían al túnel en forma de círculo propuesto en el Momento 1. Al proponerles el siguiente cuestionamiento.

Pregunta detonadora al estudiante para el Momento 2.

De las formas presentadas en el Momento 1, ¿cuál sería la mejor posición del rectángulo para configurar el área del túnel?, ¿cuántos rectángulos propondrías para lograr aproximarte al área del túnel?

Utiliza el segundo archivo en GeoGebra que se te proporciona y usa el comando Polígono  para que dibujes los rectángulos inscritos al túnel.

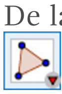
Momento 3

Se pretendió que los estudiantes recurrieran a una figura regular para poder caracterizar una figura irregular. Se les presentó una figura irregular como una hoja de helecho o un romanesco a los estudiantes, como se observa en la Figura 5. La propuesta fue retomada de Lima (2020), ya que un fractal se caracteriza por ser un objeto geométrico con estructura irregular que se repite a diferentes escalas. Esta propiedad, conocida como autosimilitud, según este autor, implica que cada parte del fractal, al ser ampliada, muestra la misma forma que el objeto completo.

Nota. Istockphoto (2025).

Figura 5. Imagen de una coliflor Romanesco

Pregunta detonadora al estudiante para el Momento 3

De la forma presentada en el inicio de la Sesión. usa el comando Polígono  para que dibujes los triángulos inscritos o circunscrito a la coliflor.

¿Cuántos triángulos propondrías para lograr aproximarte al área del romanesco?

Momento 4

El cierre de los momentos uno, dos y tres se plantean dos preguntas detonadoras, la cuales son las siguientes.

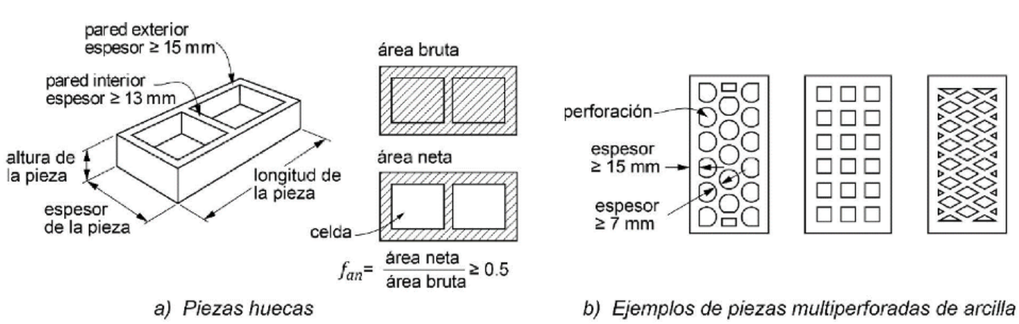
Si el número de figuras geométricas (triangulo, rectángulo, etc.) fuese tan grande, más grande que un millón de figuras geométricas, ¿qué tan cercana sería la suma de estas áreas al área del túnel o la romanesco (según la etapa de la secuencia didáctica)? Argumenta tu respuesta ____________________ ____.

¿Qué expresión usarías para calcular el área de la figura encerrada con las áreas de la figura o las figuras que propusiste?

Momento 5

Plantearon la construcción en equipos de Blocks Huecos de Concreto (BHC), los cuales fueron sometidos a carga en el laboratorio de materiales de la FI. El objetivo de este momento fue construir un BHC el cual debe tener cierta área de material que pueda resistir a la carga. Tal y como lo considera la Norma Mexicana ([NTC], Gavilán, 2018), que dice que los blocks huecos, en su sección transversal más desfavorable, es un área neta de por lo menos 75 por ciento del área bruta; además, el espesor de sus paredes exteriores no es menor que 15 mm, como se observa en la Figura 6.

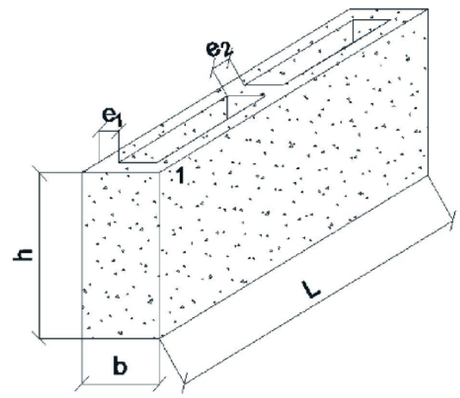
Las especificaciones según la NTC-2018 para piezas de BHC con dos hasta cuatro celdas, deben tener un espesor mínimo de las paredes interiores de 13mm. Para piezas de BHC multiperforadas, cuyas perforaciones sean de las mismas dimensiones y con distribución uniforme, deben tener un espesor mínimo de las paredes interiores de 7mm. Se comprende como piezas multiperforadas aquellas con más de siete perforaciones o alveolos.



Nota. Gavilán (2018, p.17).

Figura 6. Especificaciones de área de blocks huecos y blocks multiperforados

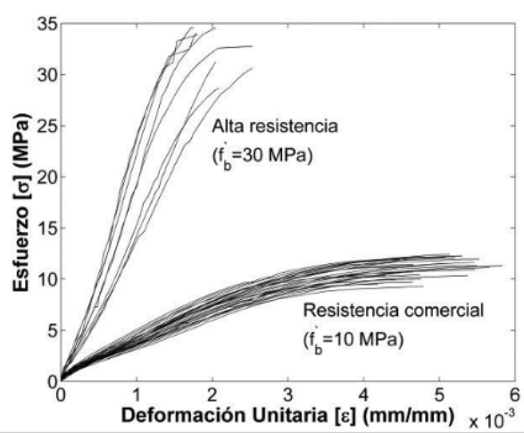
Para construir un block hueco de concreto (BHC) se tienen características geométricas como lo señalaron Ruiz y Godínez (2022): e1 es el espesor de las paredes en el sentido longitudinal; e2 al espesor de las paredes en el sentido transversal, largo (L), alto (h) y ancho (b). Como se observa en la Figura 7.



Nota. Ruiz y Godínez, (2022, p. 68).

Figura 7. Características geométricas relevantes de un BHC

Entonces para relacionar el objeto de la sumatoria de Riemann con el análisis mecánico en los BHC, se podría realizar un análisis continuo en las pruebas mecánicas a los BHC de los estudiantes para que puedan obtener gráficas experimentales del esfuerzo-deformación de los BHC. En García et al. (2013) sometieron las muestras de blocks de concreto a cargas con una velocidad de 1 kN/s hasta la falla. A partir de la historia de carga versus deformación axial de cada una de las muestras se obtuvieron las curvas esfuerzo-deformación unitaria de cada uno de los bloques ensayados como las mostradas en la Figura 8.



Nota. García et al. (2013, p. 79).

Figura 8. Curvas esfuerzo-deformación unitaria de los bloques ensayados a distinta resistencia

A partir de estas curvas se puede solicitar a los estudiantes el área bajo la curva esfuerzo-deformación, que se interpreta como la **tenacidad** del material (Yépez, 2014). Según García et al. (2013) las curvas experimentales de esfuerzo-deformación unitaria tuvieron dos comportamientos: Una parte de las curvas se comportó de manera lineal (hasta aproximadamente el 30 % de su resistencia máxima); mientras que la siguiente, lo hizo de manera no lineal (hasta la falla diagonal de corte). Entonces, la incorporación de la sumatoria de Riemann para encontrar el área bajo la curva, sería tanto para la parte lineal como para la no lineal. Teniendo en cuenta que no se conoce analíticamente la función de la curva (a diferencia de lo que sucede en los libros de cálculo, donde sí proporcionan la expresión analítica para la función), debido a que proviene de un proceso experimental.

Este Momento 5 se basa en el Aprendizaje Basado en Proyectos, en el cual los estudiantes de la FI tienen como proyecto diseñar su BHC, con un número de alveolos determinado y agregados controlados. Siguiendo las indicaciones de la norma NMX-C-036-ONNCCE-2013 (2013), obtendrán la curva experimental esfuerzo-deformación, midiendo el desplazamiento provocado por la máquina universal mediante un Arduino y transductores de desplazamiento (LVDT's). A partir de esa curva, es posible obtener la **tenacidad** mediante una aproximación al área bajo la curva esfuerzo-deformación.

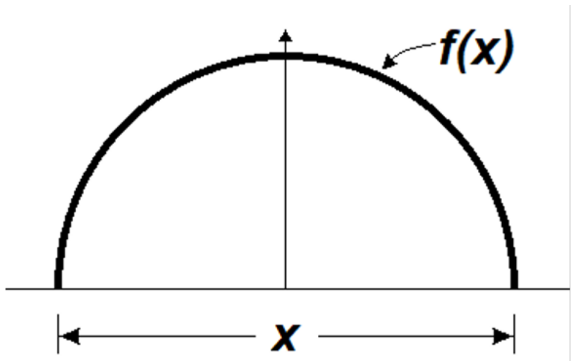
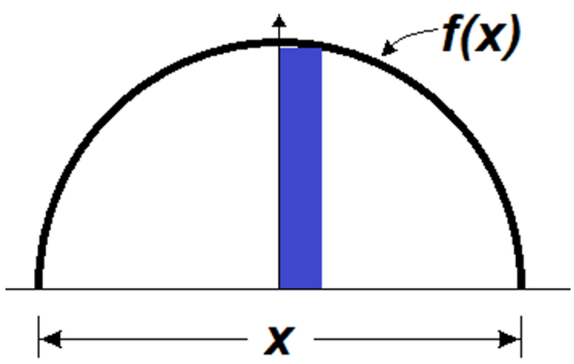
Se establece un conjunto de tareas basadas en la resolución de preguntas o problemas (retos), mediante un proceso de investigación o creación por parte de la comunidad estudiantil, la cual trabaja de manera relativamente autónoma y con un alto nivel de implicación y cooperación. Al final se culmina con un producto final presentado ante los demás (difusión).

Sesión 1

Propósito de Aprendizaje: Se espera que el estudiante identifique una forma idónea que le permita la configuración de un área rectangular para comprender otra área que corresponda a una figura regular. Se les proporciona un archivo en GeoGebra, para que los estudiantes propongan figuras regulares por debajo de una f(x) sin expresión analítica.

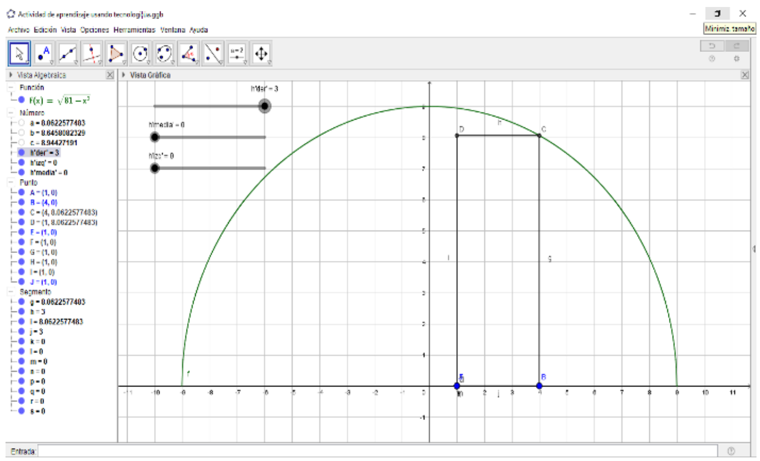
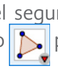
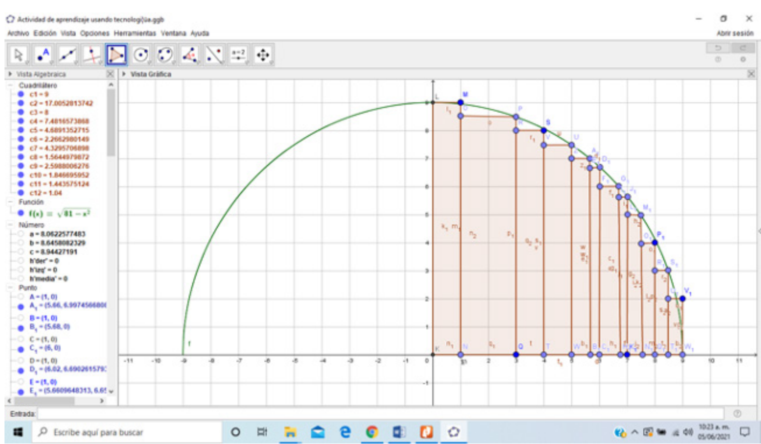
En la etapa de inicio se les presenta a los estudiantes una problemática en la cual se requiere establecer un área bajo una curva f(x), dicha función carece de su representación analítica. La intencionalidad didáctica es generar una lluvia de ideas con los comentarios de los estudiantes al proponer una figura rectangular en color azul por debajo del semicírculo y la manera en que se podría cubrir el área del semicírculo con ese rectángulo o varios rectángulos.

Tabla 1

Etapa	Actividad	tiempo
Inicio	Se expone el problema que involucra el determinar el área de un túnel mediante áreas rectangulares. Con un número indeterminado de rectángulos (figura regular) dentro de un túnel (Figura regular). **Presentación del problema** Se requiere determinar el área de un túnel (un semicírculo) mediante aproximación. Para ello, se propone construir figuras rectangulares al interior del mismo. Como se ve en la siguiente imagen.   ¿Cómo se podría cubrir el área del semicírculo con ese rectángulo?	10 min.

En la etapa de desarrollo de la Sesión 1, la intencionalidad didáctica es que los estudiantes construyan en el archivo proporcionado por el docente una serie de rectángulos inscritos o circunscritos con una base de igual tamaño. También se pueden proponer rectángulos con distintas bases. Se espera que emerja en los estudiantes la idea de la dinamicidad en la construcción de los rectángulos y que estos al aumentar su número pueden aproximarse al área por debajo de la curva propuesta.

Tabla 2

<table>
<tr><th>Etapa</th><th>Actividad</th><th>tiempo</th></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td>
Organizarse en equipos de 3 personas para que trabajen en la situación problema los Momentos 1 y 2 presentados en la metodología de este escrito.
Momento 1
A los estudiantes se les proporciona un archivo previamente construido en GeoGebra y se les instruye: Manipula los deslizadores que se muestran en la pantalla de uno en uno. Comenta con tus compañeros qué observas:

Momento 2
¿Cuál sería la mejor posición del rectángulo para configurar el área debajo del túnel que acabas de manipular (haciendo alusión al primer archivo de GeoGebra proporcionado)? ¿Cuántos rectángulos propondrías para lograr aproximarte al área del túnel?
Utiliza el segundo archivo en GeoGebra que se te proporciona y usa el comando Polígono  para que dibujes los rectángulos inscritos o circunscrito al túnel.

Elegirán a un representante de equipo el cual expondrá a la clase lo trabajado en la situación problema.
</td><td>80 min.</td></tr>
</table>

En la etapa del cierre de la Sesión 1, la intencionalidad didáctica es que ocurra una retroalimentación con las respuestas de los estudiantes. Que observen que al aumentar el número de rectángulos se pueden aproximar mejor al área del semicírculo. Se espera que construyan una expresión analítica para la serie geométrica propuesta por ellos.

Tabla 3

Etapa	Actividad	tiempo
Cierre	Consensar sobre cuál sería la mejor opción que satisface la pregunta del **Momento 4** metodológico. De acuerdo con tu propuesta de área rectangular, ¿qué tan cercana es al área del túnel? Compara tu respuesta con la de tus compañeros. Si el número de figuras rectángulos fuese tan grande, más grande que un millón de rectángulos, ¿qué tan cercana sería la suma de estas áreas al área del túnel? Argumenta tu respuesta. ¿Qué expresión usarías para calcular el área de la curva solicitada en un intervalo dado usando los rectángulos que construiste?	25 min.

Sesión 2

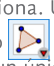
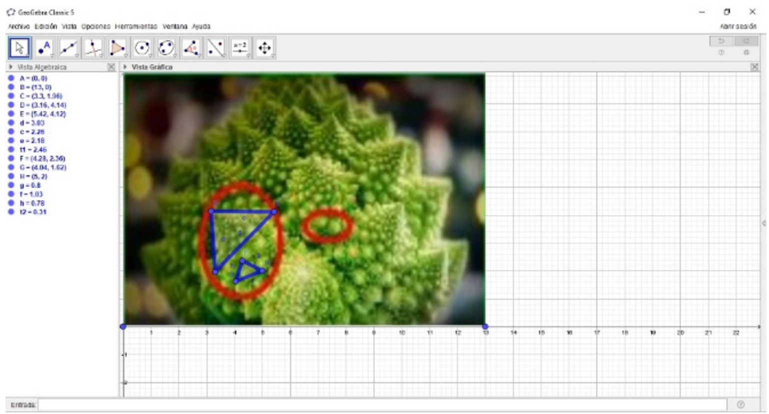
Propósito de Aprendizaje: Se espera que el estudiante aplique un número determinado de áreas triangulares o alguna otra que se visualice en el tránsito de un área irregular a una regular. En la etapa de inicio la intencionalidad didáctica es que el estudiante pueda identificar la autosimilitud que existe en el fractal (Lima, 2020) y comentar que la parte encerrada en el círculo rojo se parece a toda la coliflor entera. Se pretende generar una lluvia de ideas con los comentarios de los estudiantes al proponer una figura triangular para la parte encerrada en el círculo y la manera en que se podría cubrir el área de toda la coliflor con ese triángulo o varios triángulos acorde a las sugerencias.

Tabla 4

Etapa	Actividad	tiempo
Inicio	Presentar una figura irregular como una hoja de helecho o una coliflor romanesco a los estudiantes (**Momento 3** de la metodología). Observa la parte encerrada en la siguiente imagen de una coliflor romanesco. ¿Se parece la parte encerrada en el círculo rojo a toda la coliflor?  Se requiere determinar el área de toda la coliflor mostrada en la imagen mediante aproximación. Para ello, se propone construir un triángulo para la parte encerrada en el círculo. ¿Cómo se podría cubrir el área de la coliflor con ese triángulo?	15 min.

En la etapa de desarrollo de la Sesión 2 la intencionalidad didáctica es que el estudiante aplique un número determinado de áreas triangulares en el tránsito de un área irregular a una regular. En la etapa de inicio se les presenta a los estudiantes una figura irregular en la cual se requiere establecer si un área más pequeña se parece a la forma irregular completa. Se pretende generar una lluvia de ideas con los comentarios de los estudiantes al proponer una composición más pequeña de área.

Tabla 5

Etapa	Actividad	tiempo
Desarrollo	Retomando lo trabajado en la etapa de inicio. Apóyate del archivo que se te proporciona. Utiliza la imagen del Romanesco en GeoGebra y usa el comando Polígono  para que dibujes los triángulos inscritos o circunscrito a la coliflor. ¿Dibuja un único triangulo que cubra toda la superficie de la coliflor? Consideras que el área de este único triángulo es igual a la superficie solicitada? Intenta dibujar más triángulos para aproximarte al área. ¿Cuántos triángulos propondrías para lograr aproximarte al área de la coliflor? 	80 min.

En la etapa del cierre de la Sesión 2, se espera que ocurra una retroalimentación con las respuestas de los estudiantes. Que observen que al aumentar el número de triángulos se pueden aproximar mejor al área total de la coliflor. Se espera que construyan una expresión analítica para la serie geométrica propuesta por ellos.

Tabla 6

Etapa	Actividad	tiempo
Cierre	Socialización de sus propuestas (**Momento 4** de la metodología). De acuerdo con la propuesta de área triangular, ¿qué tan cercana es a la superficie de la coliflor? Compara tu respuesta con la de tus compañeros. Si el número de figuras triangulares fuese tan grande, más grande que un millón de triángulos, ¿qué tan cercana sería la suma de estas áreas a la superficie de la coliflor? Argumenta tu respuesta. ¿Qué expresión usarías para calcular el área de la superficie solicitada en un número determinado de triángulos que construiste?	25 min.

Sesión 3

Para el caso del aprendizaje basado en el proyecto (Momento 5), se considera una serie de actividades para la construcción del BHC y la modelación de la curva esfuerzo-deformación unitaria.

Inicio de la Sesión 3

Investigación sobre la forma de elaborar una BHC y las normas que debe de cumplir. Así como la socialización de lo investigado. Esto coincide con lo propuesto por Vázquez (2021), quien señala que los estudiantes al realizar investigaciones les permite descubrir nuevas ideas, explicar de forma argumentada sus opiniones, aplicar teorías adquiridas a problemas prácticos, así como descubrir nuevos y más efectivos caminos para su propio proceso formativo.

Desarrollo de la Sesión 3

Construcción de prototipos de BHC y pruebas en el laboratorio de mecánica de materiales para determinar la curva experimental esfuerzo-deformación unitaria. En esta etapa se plantea que los estudiantes planifiquen y organicen la información obtenida en el inicio de la Sesión 3. Después de planificar y organizar la información, deben sintetizar la información que les será útil en la construcción y diseño de los BHC. También se espera que identifiquen la información que le haga falta para los ensayos de los BHC. Esta etapa se retoma de lo mencionado por Aragay y Martínez (2020) sobre la búsqueda y síntesis de información, así como la elaboración del producto final.

> Búsqueda y síntesis de información: En esta fase, el alumnado va tomando conciencia, paso a paso, de lo que sabe y lo que le falta saber. Se van sintetizando los nuevos conocimientos y vinculando con las necesidades del proyecto.
>
> Elaboración del producto final: En este momento, con los nuevos conocimientos ya adquiridos, el alumnado está preparado para materializar su respuesta al desafío: la elaboración de su producto final. (p.16)

El desafío consiste en determinar la tenacidad de los BHC construidos por los estudiantes.

Cierre de la Sesión 3

Presentación de los BHC ante la comunidad estudiantil junto a los resultados de las pruebas mecánicas. Se considera que en esta etapa los estudiantes podrán verter toda su experiencia al llevar a cabo el proyecto de elaboración de BHC y representa para ellos una forma de aprender mucho más relevante que presentar un conocimiento ya finalizado.

> El trabajo que realizan los alumnos es mucho más significativo cuando éste no tiene como objetivo el examen o la calificación otorgada por el docente. Las

> experiencias que han desarrollado este modo de trabajo evidencian que los alumnos al presentar sus trabajos a un público real, se preocupan mucho más por su calidad. (Aragay y Martínez, 2020, p.16)

Con esta última actividad se concluye el Momento 5 diseñado en la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos.

CONCLUSIONES

El proceso de pensar los elementos que constituyen una propuesta de diseño es algo que se ha plasmado en todo el documento. Mencionar cuáles son las intencionalidades de cada parte de las actividades se considera relevante, ya que en muchas investigaciones se presentan las secuencias como creadas de la nada. Se incorpora un inicio, un desarrollo y un cierre para cada una de las actividades. Se plantea aplicar la propuesta de diseño antes de presentar el objeto matemático, tal y como lo hacen los libros de cálculo.

La propuesta busca un aprendizaje más profundo, significativo y contextualizado de la sumatoria de Riemann, utilizando la inversión y la visualización dinámica para involucrar activamente al estudiante en la construcción del conocimiento. Se busca romper con la presentación tradicional y abstracta, fomentando la comprensión y el razonamiento matemático en los estudiantes del segundo semestre de la IC en la FI de la UNACH.

REFERENCIAS

Acosta, R. (2012). Procedimientos geométricos para evaluar integrales definidas y sus implicaciones didácticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25*, 341-352.

Aragay, X. y Martínez, M. (2020). *El Aprendizaje Basado en Proyectos en PLANEA. Enfoque general de la propuesta y orientación para el diseño colaborativo de proyectos*. Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF).

Beer, F., Johnston, E., Dewolf, J. y Mazurek, D. (2010). *Mecánica de Materiales* [5.a ed.]. McGraw-Hill.

De Luca, A. (2012, octubre 25). ¿Qué es el pensamiento lateral y para qué se utiliza? *Mentes liberadas, aprende sin límites*. https://www.mentesliberadas.com/2012/10/25/que-es-el-pensamiento-lateral/

Díaz, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Comunidad de Conocimiento UNAM. https://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Díaz-Urdaneta, S. y Prieto, J.L. (2016). Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. *IX Congreso Venezolano de educación Matemática*. Barquisimeto, Lara, Venezuela. (PDF) Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático (researchgate.net)

García, J.M., Bonett, R.L. y Ledezma, C. (2013). Modelo Analítico del Comportamiento a Compresión de Bloques Huecos de Concreto. *Revista de la Construcción, 12*(3), 76-82.

Gavilán, J.J. (2018). *Comentarios y ejemplos de las normas técnicas complementarias para el diseño y construcción de estructuras de mampostería del gobierno de la ciudad de México*. Portal de Transparencia de la Ciudad de México. https://www.transparencia.cdmx.gob.mx/storage/app/uploads/public/5c3/7d1/af4/5c37d1af4ac13848933250.pdf

Granera, J. A. (2019). La integral definida como el área bajo una curva en un entorno computacional. *Revista Científica De FAREM-Estelí,* (30), 3–19. https://doi.org/10.5377/farem.v0i30.7883

Istockphoto. (2025). *Coliflor Romanesco*. istockphoto.com. https://www.istockphoto.com/es/fotos/coliflor-romanesco

Laderas, E., Acori, V. y Villa, L. (2023). Enseñanza del cálculo diferencial e integral asistido por el software GeoGebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 26*(3), 357-377. https://doi.org/10.12802/relime.23.2634

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* [9.a ed.]. McGraw-Hill.

Lima, J.J. (2020). *Los fractales en la enseñanza-aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de límite de una sucesión: una propuesta didáctica para estudiantes de Bachillerato General Unificado (BGU)*. [Tesis de Licenciatura]. Universidad Central del Ecuador.

Moreno, C. y Ríos, P. (2006). Concepciones en la enseñanza del cálculo. *SAPIENS, 7*(2), 25-39.

Muñoz, L. (2013). PowerPoint y el desarrollo del pensamiento lateral del estudiante. *Praxis & Saber, 4*(8), 265-290.

NMX-C-036-ONNCCE-2013. (2013). *Industria de la construcción-Mampostería- resistencia a la comprensión de bloques, tabiques o ladrillos y tabicones y adoquines-Método de ensayo*. ONNCCE, S. C.

Ruiz, J. A. y Godínez, E. A. (2022). Análisis estadístico de características geométricas y mecánicas del bloque hueco de concreto de Tuxtla Gutiérrez. *Vivienda Y Comunidades Sustentables*, (11), 63–84. https://doi.org/10.32870/rvcs.v0i11.193

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En O. Kulesz (Ed.), *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 13-68). Libros del Zorzal.

Santos, L.M. (2015). Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI. En X. Martínez Ruiz y P. Camarena Gallardo (Coords.), *La educación matemática en el siglo XXI* (pp. 349). Instituto Politécnico Nacional.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos* [4.a ed.]. Cengage Learning.

Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH). (2016a). *Mapa curricular de la licenciatura en Ingeniería Civil*. https://www.ingenieria.unach.mx/images/Plan-2016/mapa-curricular-PLAN2016.pdf

Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH). (2016b). *Programa Analítico de la Unidad de Competencia Cálculo Integral*. https://www.ingenieria.unach.mx/images/Plan-2016/10.-CALCULO-INTEGRAL.pdf

Vázquez, J. C. (2021, julio 2). ¿Cómo detonar el Aprendizaje Basado en Investigación en el Aula? Observatorio del Instituto para el Futuro de la Educación. https://observatorio.tec.mx/edu-bits-blog/aprendizaje-basado-en-investigacion/

Vergara, J. L. (2022). Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 22*(2), 1-20.

Yépez, H. (2014). *Apuntes de resistencia de Materiales 1A*. Pontificia Universidad Católica del Perú.