

Geodésicas nulas alrededor del Agujero Negro de Schwarzschild

Null geodesics around the Schwarzschild Black Hole

—

José Adrián Ramos Choque¹

joseadrianramoschoque@gmail.com • ORCID: 0009-0002-5681-3150

Enrique Martínez Parra²

enmapa18@yahoo.com • ORCID: 0009-0001-7348-5753

Lourdes Susana Condolo Matailo³

lourdescondolo23@gmail.com • ORCID: 0009-0006-2264-4845

Luis Osvaldo Téllez Tovar⁴

osva117@hotmail.com • ORCID: 0000-0003-3316-4741

1 UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO: PUNO, PUNO, PE.

2 INVESTIGADOR INDEPENDIENTE, PUNO, PERÚ.

3 INVESTIGADORA INDEPENDIENTE. CUENCA, ECUADOR.

4 CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL, MÉXICO.

Para citar este artículo:

Ramos Choque, J. A., Martínez Parra, E., Condolo Matailo, L. S., & Téllez Tovar, L. O. Geodésicas nulas alrededor del Agujero Negro de Schwarzschild. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo*, 15(45). <https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a02>

RESUMEN

La Relatividad General (RG) de Einstein describe la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Una de sus predicciones más fascinantes es la existencia de agujeros negros, objetos tan compactos que ni siquiera la luz puede escapar de su interior. Este artículo de revisión presenta un análisis introductorio de las geodésicas nulas (trayectorias de fotones) en el espacio-tiempo de Schwarzschild, la solución más elemental de las ecuaciones de Einstein en el vacío, que describe un agujero negro sin rotación ni carga. Se revisan los fundamentos de las ecuaciones de campo de Einstein y la métrica de Schwarzschild, destacando las propiedades del horizonte de eventos y la singularidad. El objetivo central es estudiar las trayectorias, o geodésicas, que sigue la luz en este entorno, el cual está determinado por el parámetro de impacto. Mediante el uso del método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden aplicado a la ecuación de la órbita, se analizan y discuten los tres regímenes posibles para un fotón: la desviación gravitacional, las órbitas circulares inestables en la esfera de fotones y la captura definitiva por el agujero negro. Los resultados de las simulaciones se presentan y contrastan con las predicciones teóricas. Finalmente, se discuten las implicaciones de estos hallazgos para la astrofísica moderna, como la sombra de los agujeros negros, y se señalan posibles direcciones para investigaciones futuras.

Palabras clave:

Relatividad general; agujero negro de Schwarzschild; geodésicas nulas; trayectorias de los fotones; lente gravitacional; método de Runge-Kutta

— *Abstract* —

Einstein's General Relativity (GR) describes gravity as a manifestation of space-time curvature. One of its most fascinating predictions is the existence of black holes—objects so compact that not even light can escape from within them. This review article presents an introductory analysis of null geodesics (photon trajectories) in Schwarzschild spacetime, the simplest vacuum solution to Einstein's equations, describing a non-rotating, uncharged black hole. The fundamentals of Einstein's field equations and the Schwarzschild metric are reviewed, highlighting the properties of the event horizon and the singularity. The main objective is to study the paths, or geodesics, that light follows in this environment, which is determined by the impact parameter. By using the fourth-order Runge-Kutta numerical method applied to the orbit equation, the three possible regimes for a photon are analyzed and discussed: gravitational deflection, unstable circular orbits on the photon sphere, and capture by the black hole. Simulation results are presented and compared with theoretical predictions. Finally, the implications of these findings for modern astrophysics—such as black hole shadows—are discussed, and potential directions for future research are outlined.

Keywords:

General Relativity; Schwarzschild Black Hole; Null Geodesics; Photon Trajectories; Gravitational Lensing; Runge-Kutta Method.

RELATIVIDAD GENERAL

La Relatividad General es una teoría de la gravitación formulada por Albert Einstein (1915). A diferencia de la gravitación newtoniana, esta teoría interpreta la gravedad no como una fuerza, sino como una manifestación geométrica de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de masa y energía (Cheng, 2005).

Uno de sus pilares fundamentales es el principio de equivalencia, el cual establece que no es posible distinguir localmente entre un sistema de referencia acelerado y uno inmerso en un campo gravitacional. Este principio permite comprender que los efectos de la gravedad pueden describirse mediante una métrica, que es un objeto matemático que codifica toda la información sobre la geometría del espacio-tiempo. Permite calcular distancias, ángulos, y trayectorias. De este modo, los cuerpos no experimentan fuerzas gravitacionales, sino que siguen trayectorias determinadas por dicha geometría (Cheng, 2005; Wald, 1984; Carroll, 2019).

En Relatividad General, el movimiento de las partículas se describe mediante geodésicas, las cuales representan la trayectoria que debe seguir una partícula libre en presencia de un campo gravitacional.

ECUACIONES DE EINSTEIN

Las ecuaciones de campo de Einstein son la base matemática de la Relatividad General. Relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía. El físico John Wheeler (1990) lo resumió así: «El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse».

Las ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde $G_{\mu\nu}$, el Tensor de Einstein, representa la geometría del espacio-tiempo. Está dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2)$$

Con $R_{\mu\nu}$, conocido como el Tensor de Ricci; y R , llamado Escalar de curvatura, que describen la curvatura de una región en presencia de la gravedad; $g_{\mu\nu}$, también llamado Tensor métrico, es la «regla» que define las distancias y el tiempo en el universo. $T_{\mu\nu}$ es el Tensor de Energía-Impulso que describe el contenido de materia y energía en el espacio-tiempo que producen el campo gravitacional. G es la Constante de Gravitación Universal con un valor de $6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ y c es la velocidad de la luz en el vacío, cuyo valor es de $2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$.

La expresión (1) es la forma compacta de las ecuaciones de la Relatividad General, nos muestra, del lado izquierdo, la geometría del espacio y, del lado derecho, describe la masa y la energía presentes. Esta expresión se puede desarrollar considerando lo siguiente:

- Los Índices y la Dimensión: Los índices griegos μ y ν son etiquetas que representan las dimensiones del espacio-tiempo: 0,1,2,3 donde 0 es el tiempo y 1,2,3 son las dimensiones espaciales x, y, z .
- Cada índice puede tomar diferentes valores. Sin embargo, en este trabajo se consideran 4 dimensiones. Al tener dos índices independientes, la expresión representa una matriz de 4×4 . Esto nos da 16 ecuaciones. Como los tensores $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ son simétricos, la ecuación para la componente (1,2) es la misma que para el (2,1). Por eso, en la práctica, se reducen a 10 ecuaciones independientes:

Tipo de Componentes	Combinaciones (μ, ν)	Cantidad	Descripción
Componente Temporal	(0, 0)	1	Relaciona la curvatura con la densidad de energía total. Es el límite donde se recupera la gravedad Newtoniana.
Componentes Mixtos	(0, 1),(0, 2),(0, 3)	3	Describen el flujo de energía (momento). Representan cómo el movimiento de la masa arrastra el espacio-tiempo.
Componentes Diagonales	(1, 1),(2, 2),(3, 3)	3	Relacionan la curvatura con la presión en las tres direcciones espaciales.
Componentes de Cizalla	(1, 2),(1, 3),(2, 3)	3	Representan los esfuerzos cortantes (fuerzas que deforman el espacio-tiempo de forma no diagonal).

AGUJEROS NEGROS

La solución de Schwarzschild fue la primera solución exacta encontrada a las ecuaciones de campo de Einstein. El astrofísico y matemático alemán Karl Schwarzschild la descubrió en 1916, mientras servía en el frente ruso durante la Primera Guerra Mundial (Rodríguez, 2017). A pesar de las condiciones adversas, Schwarzschild logró resolver las complejas ecuaciones para el caso de un cuerpo esférico, estático y sin carga. Su trabajo demostró la existencia teórica de lo que luego se llamaría agujero negro y sentó las bases para el estudio de la física de los objetos compactos (Shapiro & Teukolsky, 1983). Aunque el resultado de la solución dada por Schwarzschild podía aplicarse a la descripción de cuerpos como el sistema solar también explicaba la física de los agujeros negros, esto último, aunque era obvio, ni Einstein ni Schwarzschild lo sabían en ese momento (Shapiro & Teukolsky, 1983). Reciben el nombre de agujero negro porque, debido a la gran cantidad de masa

que poseen, generan un campo gravitacional tan fuerte que ni la luz puede escapar de él (Carnalla-Martinez & de Ciencia, 2025; Percy, 1993).

Características principales de los agujeros negros

- **Horizonte de Eventos:** Superficie esférica que marca el "punto de no retorno". Es el límite a partir del cual la velocidad de escape supera la velocidad de la luz. Para un observador externo, el tiempo se dilata infinitamente para los objetos que se acercan al horizonte (Percy, 1993).
- **Singularidad:** Punto central de densidad donde las leyes de la física conocida dejan de ser aplicables. Está oculta tras el horizonte de eventos (Conjetura de censura cósmica) (Percy, 1993).
- **Disco de Acreción:** Remolino de gas, polvo y plasma que orbita a altas velocidades alrededor del agujero negro. El material se calienta por fricción y emite radiación rayos X antes de cruzar el horizonte de eventos (Kazmierczak & Team, 2025).
- **Ergosfera:** en agujeros negros rotantes la región exterior al horizonte donde el espacio-tiempo es arrastrado por la rotación del agujero. Es posible extraer energía de esta región a través del proceso de Penrose (Meringolo et al., 2025).

Clasificación de los agujeros negros por Masa

- **Microagujeros Negros:** Tamaño subatómico. Objetos teóricos predichos por algunos modelos cosmológicos (Percy, 1993).
- **Agujeros Negros Estelares:** Masas entre 3 y 50 masas solares (Baird, 2022). Se forman por el colapso gravitacional de estrellas masivas al final de su vida.
- **Agujeros Negros de Masa Intermedia:** Masas entre 50 a 50000 masas solares (Baird, 2022). Su origen es aún objeto de estudio, ya que se cree que deben existir como eslabón perdido en la evolución desde los agujeros negros estelares de pocas masas solares hasta los supermasivos de millones de masas solares. Aunque su detección es esquiva, algunas hipótesis apuntan a que podrían formarse por la colisión y fusión de varios agujeros negros estelares o por el colapso directo de cúmulos estelares masivos.
- **Agujeros Negros Supermasivos:** Masas de 10^6 a 10^{10} masas solares. Se hallan en el centro de la mayoría de las galaxias incluida la Vía Láctea, el cual se conoce como Sagitario A* (Wald, 1984).

MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

La importancia de la métrica de Schwarzschild radica en que es la primera solución a las ecuaciones de la Relatividad General. Esta métrica describe la geometría del espacio-tiempo alrededor de una masa esféricamente simétrica, estática y sin carga eléctrica (Schwarzschild, 1916). En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , donde t es el tiempo, r es la coordenada radial que representa la distancia hacia el agujero negro medida a partir de su centro, y (θ, ϕ) son las coordenadas angulares. El elemento de línea, que se obtiene a partir de la métrica y nos dice cómo medir distancia en el espacio-tiempo bajo estudio, se escribe como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3)$$

El término $f(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$, donde M es la masa del agujero negro, cuantifica la desviación del espacio-tiempo respecto a la geometría plana de Minkowski. Este factor aparece tanto en el coeficiente temporal g_{tt} como en el coeficiente radial g_{rr} a través de su inverso. Para distancias muy grandes del agujero negro, la métrica se aproxima a la de Minkowski en coordenadas esféricas, recuperándose así el límite newtoniano de la gravedad. La métrica presenta singularidades matemáticas en puntos específicos que requieren análisis detallado.

Si hacemos $f(r)$ igual con cero y despejamos r obtenemos la solución conocida como el radio de Schwarzschild:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Si sustituimos este valor en la componente radial de la métrica obtendremos una división entre cero, lo que significa que el valor de la métrica en ese punto está indeterminado.

$$g_{rr}(r_s) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_s}\right)^{-1} = \frac{1}{f(r_s)} = \frac{1}{0} \quad (\text{indeterminado})$$

Esta divergencia indica una singularidad de coordenadas, no física, que puede eliminarse mediante un cambio adecuado de coordenadas (como las coordenadas de Kruskal-Szekeres) (Wald, 1984). El horizonte de eventos es precisamente la superficie esférica definida por $r = r_s$.

Por otro lado, en el centro del agujero negro ($r = 0$), encontramos una singularidad física real o de curvatura que, a diferencia de la singularidad en el horizonte de eventos, no puede eliminarse con un cambio de coordenadas. Esto indica que la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita. Es en este punto donde la teoría de la Relatividad General alcanza su límite de validez al no poder describir coherentemente las condiciones físicas en la singularidad (Carroll, 2019).

Geodésicas en el Agujero Negro de Schwarzschild

En un espacio-tiempo curvo, una geodésica es el camino o trayectoria que sigue una partícula sobre la que no actúan fuerzas, moviéndose únicamente bajo la influencia de la geometría del espacio-tiempo (Wald, 1984). A la trayectoria descrita por una partícula sin masa, como los fotones que componen la luz, se le conoce como geodésica nula. En este trabajo nos enfocamos en geodésicas nulas porque si conocemos el comportamiento de la luz podemos determinar propiedades importantes de un agujero negro, como el que se encuentra en el centro de nuestra galaxia, o probar la validez de la Teoría General de la Relatividad.

Existe una órbita circular inestable para fotones en $r = 3GM/c^2 = 1.5 r_s$. Se dice que es inestable porque cualquier pequeña perturbación, por ejemplo, un fotón que no llegue con el ángulo o energía exactos, hará que este se escape al infinito o caiga hacia el horizonte de eventos, en lugar de permanecer en una órbita cerrada. Si un fotón cruza el horizonte de eventos ($r < r_s$), inevitablemente cae hacia la singularidad.

De manera general, la ecuación que describe el movimiento de una partícula alrededor de un agujero negro es (Cerón Ángeles et al., 2025):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -\frac{u^2}{2} \frac{df(1/u)}{du} - uf(1/u) \quad (4)$$

Donde $u=1/r$ es la inversa de la coordenada radial, ϕ es la coordenada angular azimutal, que parametriza la órbita en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) y $f(1/u)$ es el término de la métrica bajo estudio. Para el caso de Schwarzschild, la ecuación queda como:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3Mu^2 \quad (5)$$

Al ser una ecuación diferencial de segundo orden, necesitamos dos condiciones iniciales para resolverla. Estas son

$$u_0 = \frac{1}{r_0} \quad (6)$$

$$\frac{du}{d\phi} = \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 f\left(\frac{1}{u}\right)} \quad (7)$$

Donde r_0 es la distancia a la que se encuentra el fotón respecto del centro del agujero negro, $b = L/E$ se define como el parámetro de impacto definido como la distancia perpendicular entre la trayectoria inicial del fotón y la línea paralela que pasa por el centro del agujero negro y que, como veremos más adelante, nos da información sobre la trayectoria de la partícula, E es la energía y L es el momento angular.

Resolver a mano este tipo de ecuaciones diferenciales no es sencillo, por esa razón recurrimos a algoritmos computacionales. En este caso usamos el método de Runge-Kutta que tiene su nombre en honor a sus creadores. Es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y está basado en el algoritmo de "un paso", ya que cada aproximación se basa en el paso anterior y la precisión depende de las aproximaciones de los puntos usados para obtener el resultado final (Butcher, 2000). Debido a su estabilidad numérica y alta precisión, además de no depender de derivadas de órdenes altos, este método es ideal para programarse en computadora.

Si graficamos la solución de la ecuación diferencial anterior podemos obtener la trayectoria del fotón alrededor del agujero negro. En la Figura 1 se muestra una geodésica nula en coordenadas polares (r, ϕ) para un fotón con parámetro de impacto $b > b_c$ en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Donde b_c es el parámetro de impacto crítico, valor en el que tendremos órbitas circulares inestables y que se obtiene de igualar la ecuación (7) con cero y resolver para b . La curva negra representa la trayectoria calculada a partir de la ecuación de órbita, mientras que el círculo púrpura semitransparente indica la región del horizonte de eventos en $r = r_s$. Al aproximarse al objeto masivo, el rayo de luz experimenta una desviación gravitacional, manteniendo una distancia superior al radio de la esfera de fotones ($r > 3M$). La geodésica permanece siempre fuera del horizonte (región de no retorno), alcanza una distancia cercana a r_s y luego se aleja hacia el infinito.

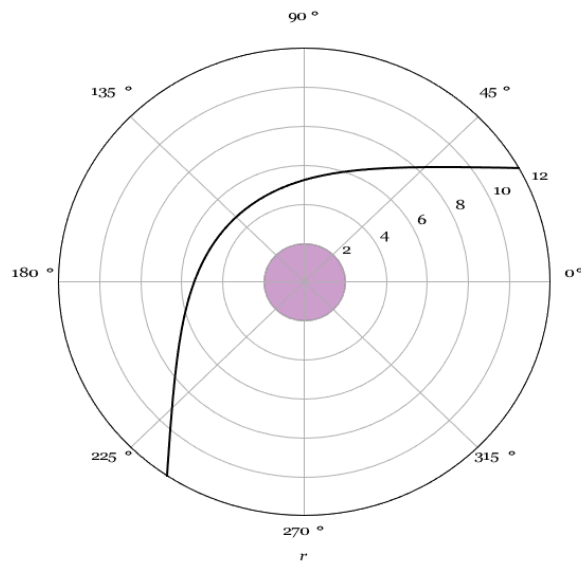


Figura 1. Geodésica nula con $b > b_c$ mostrando desviación gravitacional. La trayectoria se acerca al agujero negro, pero logra escapar de las cercanías del agujero negro

En la Figura 2 se presenta una geodésica nula para un fotón con parámetro de impacto $b = b_c$. El rayo de luz, fuertemente desviado por la curvatura, se aproxima a la esfera de fotones en $r = 3M$, donde completa múltiples órbitas alrededor del

objeto masivo antes de escapar. Este comportamiento evidencia la órbita circular inestable para fotones: un fotón con el parámetro de impacto exactamente crítico podría orbitar infinitamente en $r = 3M$, pero cualquier pequeña perturbación lo lleva a escapar o ser capturado. Las múltiples órbitas observadas reflejan la alta sensibilidad a las condiciones iniciales en este régimen crítico.

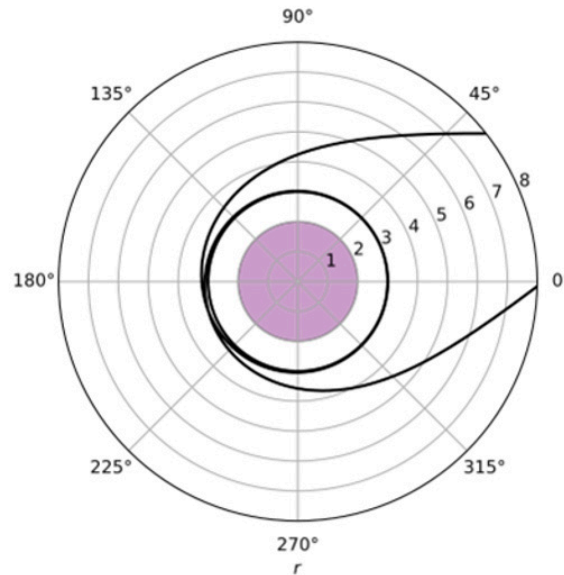


Figura 2. Geodésica nula con $b = b_c$ mostrando órbitas múltiples alrededor del agujero negro en las cercanías de la esfera de fotones

En la Figura 3 se muestra una geodésica para un fotón con parámetro de impacto $b < b_c$. La partícula, proveniente desde una distancia muy lejana al agujero negro, posee energía suficiente para superar la barrera del potencial efectivo, cruzando sin retorno el horizonte de eventos (área púrpura) y prosiguiendo inexorablemente hacia la singularidad central en $r = 0$. Este régimen ilustra el concepto de agujero negro como región de no retorno: al ser el parámetro de impacto inferior al crítico, la curvatura extrema del espacio-tiempo impide toda deflexión hacia el exterior, condenando al rayo de luz a ser absorbido definitivamente sin posibilidad de escape.

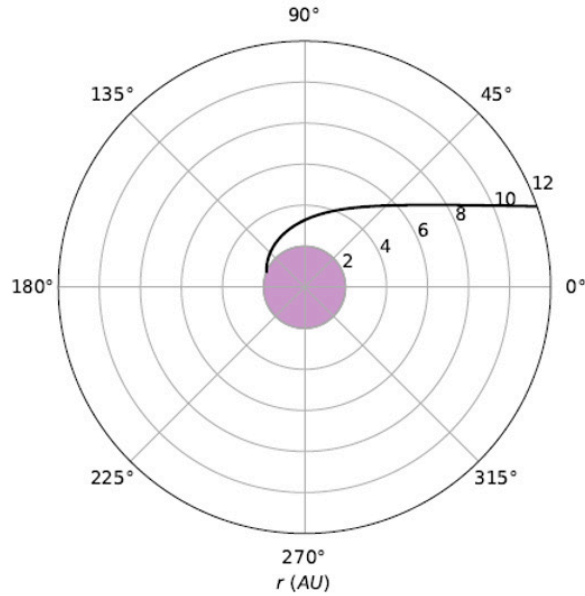


Figura 3. Geodésica nula con $b < b_c$ mostrando captura por el agujero negro. La partícula cruza el horizonte de eventos y cae hacia la singularidad

CONCLUSIONES

La Relatividad General, formulada por Albert Einstein, revolucionó la comprensión de la gravedad ya que la física newtoniana no puede explicarla completamente. Pasó de ser una fuerza a ser la curvatura del espacio-tiempo causada por la masa y la energía, mostrando así que la materia determina la curvatura y esta, a su vez, guía el movimiento de los cuerpos mediante geodésicas.

La solución a las ecuaciones de Einstein encontradas por Karl Schwarzschild demostró la existencia teórica de los agujeros negros, las órbitas circulares inestables para fotones y de una última órbita circular estable para partículas masivas que refleja la estructura no lineal de la ecuación orbital relativista. Estos resultados ilustran de manera explícita cómo la curvatura modifica sustancialmente la dinámica clásica y establece umbrales críticos en la evolución orbital. Schwarzschild confirma que la geometría determina completamente la dinámica de partículas.

Para comprender el comportamiento de partículas y fotones en las cercanías de un agujero negro, es necesario el estudio de las geodésicas nulas que permiten describir formalmente el horizonte de eventos y el radio de Schwarzschild (r_s). El análisis de la métrica de Schwarzschild evidencia la diferencia entre una singularidad de coordenadas en el horizonte de eventos y una singularidad física real (en $r = 0$), donde la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita y la teoría alcanza su límite de validez.

A partir de la ecuación (4), usando la métrica de Schwarzschild, podemos obtener la ecuación diferencial que describe la geodésica que sigue un fotón alrededor

del agujero negro antes mencionado. Es importante mencionar que esta es una ecuación diferencial de segundo orden por lo que no es sencillo resolverla de manera analítica. Esto nos obliga a usar métodos numéricos. En este trabajo usamos el método de Runge-Kutta que, al graficar sus resultados, pudimos simular cómo sería el movimiento del fotón alrededor del agujero negro para distintos valores de la masa de dicho objeto, así como del parámetro de impacto. Observamos que la trayectoria de un fotón está determinada por el valor del mencionado parámetro de impacto que, a su vez, depende de las características propias del sistema como la energía y el momento angular. Encontramos un valor crítico del parámetro de impacto tal que existen órbitas circulares inestables alrededor del agujero negro, es decir, que cualquier pequeña perturbación puede hacer que el fotón caiga hacia el agujero negro o sea disparado lejos de él. Por otro lado, si el parámetro de impacto es mayor que el valor crítico, el fotón será desviado de su trayectoria original. Sin embargo, éste se alejará del agujero negro, es decir, nunca caerá en él. Finalmente, si el parámetro de impacto es menor que el valor crítico, el fotón caerá al agujero negro sin ninguna posibilidad de escapar.

REFERENCIAS

- Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 844–847.
- Baird, C. S. (2022). *Are there different types of black holes?* West Texas A&M University. <https://www.wtamu.edu/~cbaird/sq/2022/08/02/are-there-different-types-of-black-holes/>
- Butcher, J. C. (2000). Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1–2), 1–29. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00455-6](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00455-6)
- Carnalla-Martínez, C. (2025). ¿Qué son los agujeros negros?
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Cambridge University Press.
- Cerón Ángeles, V. E., Pedraza Ortega, O., Escorcía Ramírez, R. G., & Téllez Tovar, L. O. (2025). Geodésicas de un agujero negro de Schwarzschild modificado. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 13, 8–13.
- Chandrasekhar, S. (1983). *The mathematical theory of black holes*. Oxford University Press.
- Cheng, T.-P. (2005). *Relativity, gravitation and cosmology: A basic introduction*. Oxford University Press.
- Kazmierczak, J., & NASA Team. (2025). *Black holes*. NASA. <https://science.nasa.gov/universe/black-holes/>
- Mach, E. (1915). *The science of mechanics: A critical and historical account of its development*. Open Court Publishing Company.
- Meringolo, C., Camilloni, F., & Rezzolla, L. (2025). Electromagnetic energy extraction from Kerr black holes: Ab initio calculations. *The Astrophysical Journal Letters*, 992(1), L8.
- Percy, J. (1993). *Agujeros negros*. Astronomical Society of the Pacific.
- Rodríguez, A. L. (2017). *Licenciatura en física: Trabajo de diploma*.
- Shapiro, S. L., & Teukolsky, S. A. (1983). *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*.
- Schwarzschild, K. (1916). Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9), 106–120.
- Wald, R. M. (1984). *General relativity*. University of Chicago Press.
- Wheeler, J. A. (1990). *A journey into gravity and spacetime*. Scientific American Library.