





ESPACIO I+D, INNOVACIÓN MÁS DESARROLLO

Vol. XV, Octubre 2026. **N.º 45** • **ISSN: 2007 - 6703**







MCTP
Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

Revista Digital de la Universidad Autónoma de Chiapas. Indizada en los catálogos de Sistema Nacional de Publicaciones Científicas y Humanísticas, Latindex, BIBLAT, CLASE, SIC, Actualidad Iberoamericana, REDIB, DOAJ, MIAR, Biblioteca COLMEX, Scilit y AmeliCA.

ESPACIO I+D, INNOVACIÓN MÁS DESARROLLO
Octubre 2026, Vol. XV, N.º 45.

Índices: **Sistema Nacional de Publicaciones Científicas y Humanisticas, Latindex, BIBLAT, CLASE, Actualidad Iberoamericana**, **Sistema de Información Cultural de la Secretaría de Cultura**, **REDIB, DOAJ, MIAR, Biblioteca COLMEX** y **SCILIT**.

Es una revista digital científica y cultural de carácter multidisciplinario de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH), cuenta con una periodicidad cuatrimestral y registro:

Reserva: 04-2022-070614023200-102
ISSN: 2007-6703

Secretaría de Identidad y Responsabilidad Social Universitaria

Dirección-Silvia E. Álvarez Arana
Editores técnicos-Alanis Berenice Ovalle Aguilar, Joshep Fabián Coronel Gómez
Diseño Editorial y maquetación-Joshep Fabián Coronel Gómez
Desarrollador Web y Soporte Técnico Editorial-Héctor Daniel Niño Nieto
Traducción General-Alanis Berenice Ovalle Aguilar, Claudia Ruiz Ortiz

Consejo redactor
Mónica Guillén Sanchéz
Gabriel Velázquez Toledo
Orlando López Báez (Ciencias)
Antonio Durán Ruíz (Humanidades y Cultura)

Calle 18 Pte. Sur, Número 184, Colonia Xamaipak,
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, 29050.

www.espacioimasd.unach.mx

Contacto: espacioimasd@unach.mx

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.

Comité Editorial

Alexandra Mulino • Universidad Central de Venezuela
Alfredo Briones Aranda • Universidad Autónoma de Chiapas
Ana Alejandra Robles Ruiz • CESMECA- Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas
Ana Almansa • Universidad de Málaga España
Carlos Alberto Noriega Guzmán • Universidad Autónoma de Baja California
Christian Maythe Santiago Bartolomé • Instituto de Elecciones y Participación Ciudadana/UNACH
Diana Leslie Mendoza Robles • Universidad Autónoma de Chiapas
Dorian Francisco Gómez Hernández • Universidad Autónoma de Chiapas
Eduardo Torres Alonso • Universidad Nacional Autónoma de México
Emilio Rodríguez Macayo • Universidad Autónoma de Chile. Sede Talca
Flora Eugenia Salas Madriz • Universidad de Costa Rica
Gabriel Castañeda Nolasco • Universidad Autónoma de Chiapas
Gerardo Núñez Medina • Colegio de la Frontera Norte
José Bastiani Gómez • Universidad Intercultural de Chiapas
José Martínez Torres • Universidad Autónoma de Chiapas
Karen Caballero Mora • Universidad Autónoma de Chiapas
Lorenzo Franco Escamirosa Montalvo • Universidad Autónoma de Chiapas
Lucía Tello Peón • Universidad Autónoma de Yucatán
María Eugenia Aguilar Álvarez • Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar (DGETAyCM)
Mayra Isabel de la Rosa Velázquez • Universidad Autónoma de Sinaloa
Miguel Abud Archila • Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez. México
Natacha Coca Bernal • Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Villa Clara, Cuba
Sandra Aurora González Sánchez • Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas
Sarelly Martínez Mendoza • Universidad Autónoma de Chiapas
Sandra Isabel Ramírez González • Universidad Autónoma de Chiapas
Segundo Jordán Orantes Albores • Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas
Ottmar Raúl Reyes López • Academia de Química y Biología en la UPIITA del IPN
Víctor Darío Cuervo Pinto • Instituto Politécnico Nacional-UPIITA

Asesor:
Orlando López Báez • Universidad Autónoma de Chiapas

Coordinación y gestión operativa
Silvia E. Álvarez Arana • silvia.alvarez@unach.mx

Instructivo de publicación:
https://www.espacioimasd.unach.mx/index.php/Inicio/Instrucciones

ÍNDICE

Editorial 5

Artículos

Las ondas en física: desde lo clásico hasta lo cuántico 8

Geodésicas nulas alrededor del Agujero Negro de Schwarzschild 23

Grafeno y sus aplicaciones: 20 años de aventuras 36

De Wolfram Mathematica a Python: Visualización dinámica del crecimiento poblacional como estrategia de aprendizaje 58

De las fluctuaciones primordiales a los agujeros negros del universo temprano 77

En el corazón de las estrellas de neutrones: laboratorio cósmico donde la materia alcanza sus límites 94

Documento académico

Diplomado en Física Básica 2025, organizado por el Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP) 108

El suicidio en México: una aproximación funcional del riesgo 111

EDITORIAL

Vol. 15 Núm. 45 (2026): Octubre – Enero 2027

Querida comunidad que escribe y lee en esta publicación de la Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas, les damos la bienvenida a este nuevo número, el último de este año y con el que celebramos catorce años de publicación continua y muchos logros en el camino.

Este año, los esfuerzos continuos del equipo editorial fueron reconocidos recientemente por la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) con la inserción de la *Revista Espacio I+D, Innovación más Desarrollo* al Sistema Nacional de Publicaciones Científicas y Humanísticas, reconociéndola con el grado de Consolidado. Este logro, definitivamente, nos motiva a seguir cuidando, como lo hemos hecho, la calidad de nuestros procesos editoriales y animar al equipo que ha hecho posible este logro, desde las gestiones encabezadas por la Mtra. Mónica Guillén Sánchez, titular de la Secretaría de Identidad y Responsabilidad Social Universitaria (SIRESU) y por el Mtro. Gabriel Velázquez Toledo, Director Editorial de nuestra máxima casa de estudios, pues sin el respeto y apoyo que han mostrado por la revista, esto no hubiera sido posible. También quiero agradecer a quienes integran nuestro Comité Editorial y son garantes de la calidad de la publicación.

Somos un equipo pequeño y muy comprometido con la divulgación y difusión de la ciencia, desde la revisión de textos, el diseño, el manejo de la plataforma OJS y la traducción, manteniéndonos en una continua capacitación. Así lo hemos hecho en el tema que más cambia a cada instante, como es el de la comunicación de la ciencia frente a la IA. Por ello, hemos actualizado nuestra políticas editoriales en el marco de la evaluación realizada por la SECIHTI, ahora las personas autoras deberán incluir una declaración de uso de IA, pues estamos conscientes de que no podemos mantenernos al margen de los avances y tampoco podemos limitar las prácticas investigativas de nuestra comunidad colaboradora, sin embargo, la

Universidad tiene responsabilidad con la información que divulga y de ahí que acudamos a la ética profesional de las personas autoras.

En este número, publicamos otro logro universitario y recordamos que la razón principal de ser de la institución es la comunidad estudiantil, las juventudes en formación, por ello, los artículos emanan del Diplomado en Física Básica (2025) organizado por el Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP), que reunió a estudiantes provenientes de diversos países de Centroamérica, América del Sur y el Caribe, bajo la tutela de prestigiosos investigadores; esta mezcla de saberes, nos permitió integrar un número interesante que sin duda despertará el interés de la comunidad científica y que, en varios casos, habrá de contribuir a la formación de comunicadores de la ciencia en el área de la Física. Tenemos confianza en que estos artículos lleguen muy lejos y que sirvan a su vez, para extender las fronteras editoriales unachences.

Un vez más, gracias por acompañarnos estos años y hacer suya esta publicación.

«*Por la conciencia de la necesidad de servir*»

Silvia Álvarez-Arana
Directora de la revista

Revista Espacio I+D, Innovación más Desarrollo

Benemérita Universidad Autónoma de Chiapas

ARTÍCULOS

Recepción: **Febrero 27, 2026** | Aceptación: **Agosto 13, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

Las ondas en física: desde lo clásico hasta lo cuántico

Waves in Physics: from Classical Quantum

—

Erika Lizette Arévalo Pererao[1]
perera.erika@hotmail.com

Felipe Hernández Yuena[1]
egalois5@gmail.com

Erik Díaz-Bautista[2]
ediazba@ipn.mx
ORCID: 0000-0002-2180-3895

1 Estudiante del Diplomado en Física Básica Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

2 Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional, CDMX, México

Para citar este artículo:
Díaz Bautista, E., Arévalo Perera, E. L., & Hernández Yuena, F. Las ondas en física: desde lo clásico hasta lo cuántico. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a01

RESUMEN

Este reporte desarrolla sistemáticamente el tema de las ondas en física, partiendo de las ondas mecánicas clásicas y de su ecuación de onda, para luego abordar las ondas de materia según la propuesta de De Broglie y culminar con la función de onda en mecánica cuántica y la ecuación de Schrödinger. Se destacan las diferencias fundamentales entre las descripciones clásica y cuántica del fenómeno ondulatorio, enfatizando el cambio paradigmático en la interpretación física.

Palabras clave*:*

Ecuación de onda, función de onda, mecánica clásica, mecánica cuántica, movimiento ondulatorio.

— Abstract—

This report systematically develops the topic of waves in physics, starting with classical mechanical waves and their wave equation, then addressing matter wa- ves according to De Broglie's proposal, and culminating with the wave function in quantum mechanics and the Schrödinger equation. It highlights the fundamental differences between the classical and quantum descriptions of the wave phenomenon, emphasizing the paradigmatic shift in the physical interpretation.

Keywords:

Wave equation, wave function, classical mechanics, quantum mechanics, wave motion.

1. INTRODUCCIÓN

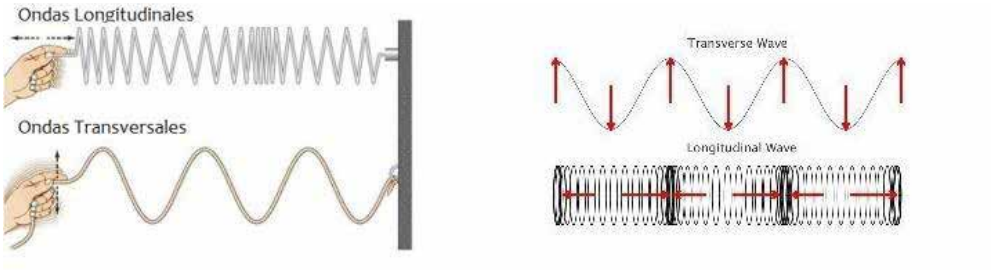
El concepto de onda es fundamental en la física, ya que describe la propagación de perturbaciones en un medio clásico o la evolución de las probabilidades en la descripción cuántica. Históricamente, surge de la necesidad de describir fenómenos naturales en los que se observa la propagación de una perturbación a través de un medio, sin que exista un transporte neto de materia. En estos casos, lo que se observa no es el desplaza- miento permanente de las partículas del medio, sino un movimiento oscilatorio alrededor de una posición de equilibrio, cuya influencia se transmite de una región del espacio a otra. Además, la regularidad observada en los fenómenos ondulatorios permite identificar magnitudes periódicas, como la longitud de onda y la frecuencia, que describen la estructura espacial y temporal de la perturbación, respectivamente. Más tarde, gracias a los fenómenos observados en el estudio de la luz, la necesidad de contar con un medio físico se replantea, lo que conduce a concluir que ciertos tipos de ondas pueden existir y propagarse en el espacio vacío, más allá de la fuente que las produce.

Este reporte desarrolla el tema comenzando con ondas mecánicas y su descripción matemática, para luego abordar las ondas de materia y la función de onda en mecánica cuántica, destacando las diferencias conceptuales entre ambos regímenes. El estudio de las ondas proporciona un puente conceptual entre la física clásica y la mecánica cuántica, mostrando cómo conceptos matemáticamente similares adquieren significados físicos radicalmente diferentes.

2. MOVIMIENTO ONDULATORIO Y ECUACIÓN DE ONDA

2.1. Definición de una onda mecánica

En diversos fenómenos naturales se observan deformaciones y movimientos que se transmiten a lo largo del espacio conservando ciertos patrones regulares. Las ondulacio- nes en la superficie del agua, así como los desplazamientos registrados en estudios sísmicos, muestran cómo una alteración inicial puede manifestarse sucesivamente en distintas regiones sin que el material en su conjunto cambie de posición permanente. Estos com- portamientos han sido descritos dentro del marco de la física clásica mediante el concepto de onda (ver Figura 1).



Recuperado de: https://es-static.z-dn.net/files/d20/26c2af0d56b9f0f68efd2a6b4a7bfdbb.png.

Figura 1. Ejemplos de ondas mecánicas en la vida cotidiana. Las ondas se clasifican en ondas longitudinales o transversales según ocurra la vibración del medio material respecto a la dirección en que se propaga la onda

Una onda mecánica es una perturbación que se propaga a través de un medio material elástico, transportando energía y momento sin un transporte neto de materia. Matemáticamente, podemos expresar una onda viajera unidimensional como:

$$y(x,t) = f(x \pm vt), \tag{1}$$

donde el signo positivo indica que la propagación ocurre en dirección negativa del eje x y el signo negativo indica que ocurre en dirección positiva (ver Figura 2).

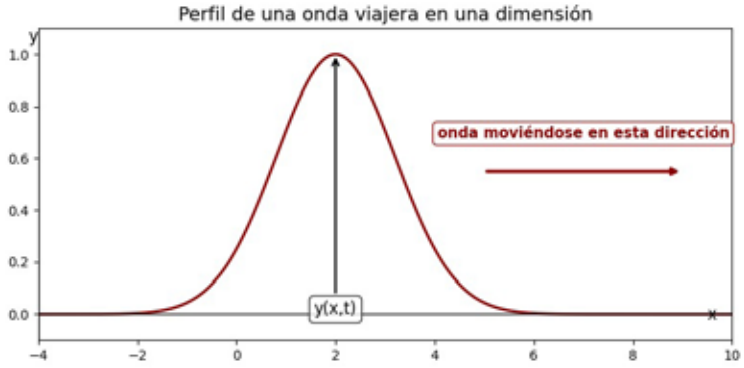


Figura 2. Perfil de una onda viajera que se propaga en la dirección positiva del eje x

2.2. Ecuación de onda unidimensional

Matemáticamente, la ecuación diferencial que gobierna muchas ondas mecánicas en una dimensión es la **ecuación de onda**, la cual se expresa como:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \tag{2}$$

donde:

- $y(x, t)$ es la perturbación que se propaga en algún medio elástico,

- v es la velocidad de fase de la onda en el medio,
- x es la posición,
- t es el tiempo.

Esta ecuación se obtiene de las leyes de Newton aplicadas a elementos del medio, considerando fuerzas elásticas. Para una cuerda tensa de densidad lineal μ (cantidad de materia por unidad de longitud) y tensión T, por ejemplo, $v = \sqrt{T/\mu}$ (ver Figura 3).

2.3. Solución armónica y parámetros físicos

Una solución particularmente importante de la ecuación (2) es la llamada **onda armónica**, la cual se expresa matemáticamente como:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi_0). \tag{3}$$

Los parámetros físicos fundamentales que se pueden identificar en esta ecuación son:

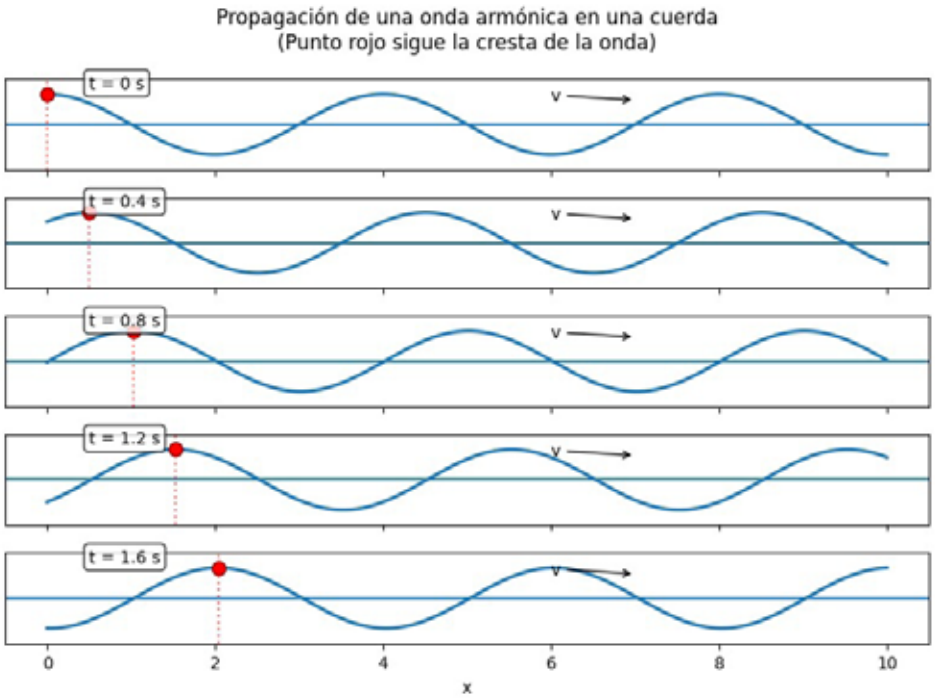


Figura 3. Una onda en una cuerda tensa propagándose en la dirección positiva del eje x

1. **Amplitud** (A): Valor máximo de la perturbación. Está relacionada con la energía transportada por la onda, que es proporcional a A^2.

2. **Frecuencia angular** (ω): Relacionada con la frecuencia temporal f por $\omega = 2\pi f$, donde f se mide en Hertz (Hz, ciclos por segundo).
3. **Número de onda** (k): Relacionado con la periodicidad espacial mediante $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
4. **Longitud de onda** (λ): Distancia entre dos puntos consecutivos en fase (por ejemplo, entre dos crestas sucesivas).
5. **Velocidad de fase** (v): Velocidad con la que se mueve un punto de fase constante (cresta, valle):

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f. \tag{4}$$

6. **Constante de fase** (φ_0): Desfase inicial que determina el valor de la onda en $x = 0$, $t = 0$.

La Figura 4 muestra la representación esquemática de la solución armónica, donde se identifican la amplitud, la longitud de onda y los puntos de fase característica.



Figura 4. Representación de una onda armónica $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t + \varphi_0)$

3. LIMITACIONES DE LA TEORÍA ONDULATORIA CLÁSICA

3.1. Ondas electromagnéticas

El desarrollo de la teoría ondulatoria clásica permitió explicar con gran éxito numerosos fenómenos en mecánica y óptica. La formulación matemática de la ecuación de onda proporcionó un marco coherente para describir la propagación de perturbaciones, y las ecuaciones de Maxwell extendieron este formalismo al mostrar que la luz podía entenderse como una onda electromagnética (EM), es decir, como campos eléctricos y magnéticos que, al variar en el tiempo, pueden propagarse a largas distancias retroalimentándose entre sí (ver Figura 5).

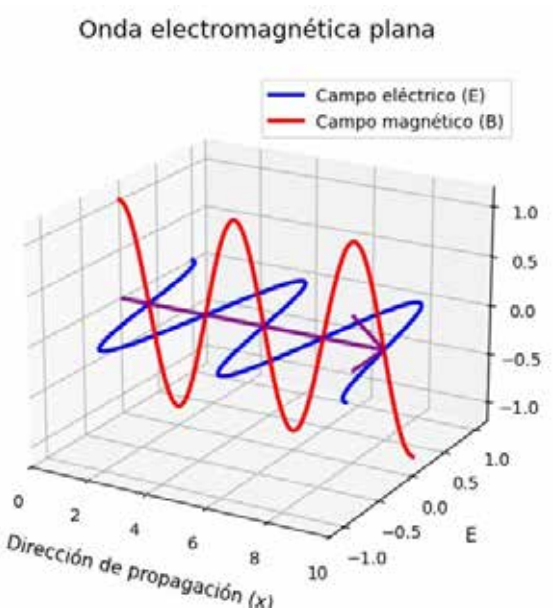
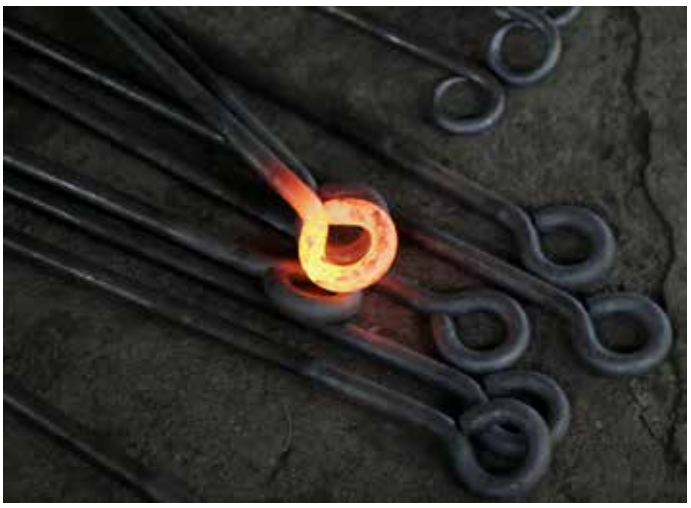


Figura 5. Representación esquemática de una onda electromagnética

En este contexto, la óptica y el electromagnetismo lograron una profunda interrelación, permitiendo explicar fenómenos como la interferencia, la difracción y la polarización dentro de un mismo esquema teórico. Además, este avance llevó a demostrar experimentalmente que estas ondas **no requieren de un medio material para propagarse**, sino que pueden hacerlo en el vacío, en clara diferencia con las ondas mecánicas. Aunque inicialmente se postuló la existencia del éter como medio de propagación de la luz, los resultados experimentales —en particular el experimento de Michelson y Morley— debilitaron dicha hipótesis y condujeron a su abandono.

3.2. Interacción luz-materia

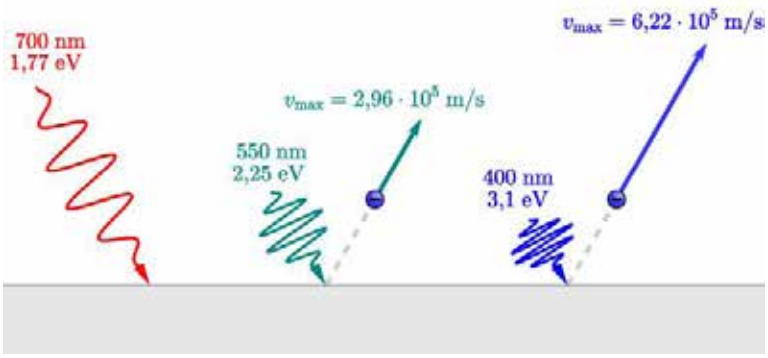
Sin embargo, comenzaron a surgir otras dificultades al estudiar más a profundidad la interacción entre la radiación y la materia. Por ejemplo, la teoría clásica asumía que la energía asociada a la radiación se intercambiaba de manera continua; no obstante, fenómenos como la radiación del cuerpo negro o el efecto fotoeléctrico (ver Figuras 6 y 7) mostraron que este supuesto no era suficiente. La situación se superó al proponer que la energía asociada a la radiación se emite y absorbe en unidades discretas conocidas como **fotones**. La necesidad de explicar estos resultados condujo a una revisión profunda de los fundamentos clásicos y abrió el camino hacia una nueva manera de entender la naturaleza: la mecánica cuántica.



Recuperado de: https://fefino.com/wp-content/uploads/2014/05/hot metalwork.jpg.

Figura 6. Cuando los objetos se calientan, emiten radiación electromagnética cuya longitud de onda depende de la temperatura del objeto y se perciben de un determinado color. Objetos con una temperatura relativamente baja, como el trozo de hierro de la imagen, aparecen rojos, mientras que objetos de mayor temperatura, como la superficie del sol, aparecen amarillos o blancos

Un fenómeno decisivo que condujo a un entendimiento más profundo de la luz fue el efecto Compton, el cual consiste en el aumento de la longitud de onda de un fotón (rayos X o gamma) tras chocar con un electrón libre, perdiendo parte de su energía y dispersándose. Este fenómeno demostró la naturaleza corpuscular de la luz, evidenciando que los fotones actúan como partículas con momento y energía (ver Fig. 8).



Recuperado de: https://cdn0.ecologiaverde.com/es/posts/1/9/2/formulas_del_efecto_fotoelectrico_6291_3_600.jpg

Figura 7. En el efecto fotoeléctrico, cuando sobre un metal incide radiación electromagnética es posible extraer electrones del material. Contrario a la concepción clásica, la energía y el número de electrones liberados del metal no dependen de la intensidad de la radiación ni del tiempo de exposición, sino de la longitud de onda (y color) de la luz incidente

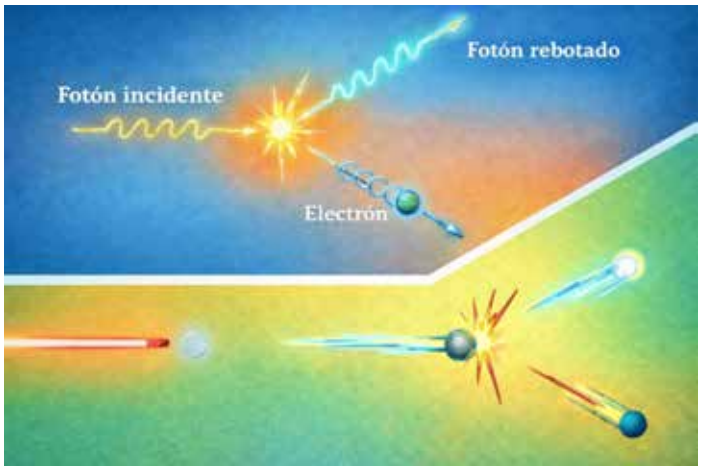


Figura 8. En el efecto Compton se pone en evidencia el comportamiento corpuscular de la radiación, pues las trayectorias que siguen un electrón y un fotón dispersados son iguales a las que seguirían dos partículas microscópicas con sus mismas energías

De esta manera, se estaría planteando una **dualidad onda-partícula** para la radiación electromagnética.

4. ONDAS DE MATERIA Y FUNCIÓN DE ONDA

4.1. Longitud de onda de De Broglie

En este contexto de tensiones conceptuales y resultados experimentales difíciles de explicar dentro del marco clásico, surgió una idea que transformaría profundamente la comprensión de la materia. En su tesis doctoral de 1924, Louis de Broglie propuso una extensión radical de la dualidad onda-partícula: "Si la luz podía comportarse como partícula, entonces las partículas materiales podían comportarse como ondas". Propuso que a toda partícula con momento p le corresponde una **onda de materia** de longitud de onda (ver Figura 9):

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{5}$$

donde $h = 6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ J s es la **constante de Planck**.

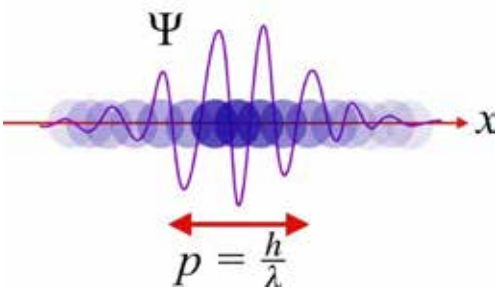


Figura 9. Representación esquemática de la onda de materia que acompañna una partícula en movimiento. El momento lineal p de la partícula y la longitud de onda λ de la onda están relacionados mediante la propuesta de De Broglie

4.2. Función de onda en la mecánica cuántica

La hipótesis de De Broglie introdujo una idea revolucionaria: si las partículas materiales poseen una longitud de onda asociada, entonces su comportamiento no puede describirse únicamente mediante las leyes clásicas del movimiento. Sin embargo, la relación $\lambda = h/p$ por sí sola no constituía una teoróa dinámica completa. Era necesario formular una ecuación que describiera la evolución temporal de estas ondas de materia y que permitiera incorporar de manera sistemática la energía y el potencial del sistema. Este paso fue dado por Erwin Schrödinger en 1926, quien desarrolló una ecuación de onda capaz de describir matemáticamente el comportamiento cuántico de las partículas, dando origen a la mecánica cuántica ondulatoria.

4.2.1. Definición e interpretación probabilística

En la mecánica cuántica, la llamada **función de onda** $\Psi(x,t)$ describe el estado cuántico de una partícula o sistema. A diferencia de una onda mecánica, $y(x,t)$, Ψ no representa una perturbación física medible directamente. Max Born propuso en 1926 una interpretación probabilística:

> El cuadrado del módulo de la función de onda, $|\Psi(x,t)|^2$, es la **densidad de probabilidad** de encontrar la partícula en la posición x en el tiempo t.

Matemáticamente, dicha probabilidad de encontrar la partícula en un intervalo dx alrededor de x es:

$$\mathrm{d}P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x. \tag{6}$$

Dado que la partícula debe estar en algún lugar del espacio, la función de onda debe estar normalizada, lo cual se expresa como:

$$\int_{\text{todo el espacio}} |\Psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1. \tag{7}$$

Dicho de otra manera, esta interpretación sugiere que las ondas de materia son perturbaciones de un campo de probabilidades que —como las ondas clásicas— pueden extenderse por todo el espacio interfiriendo entre sí, pero que —a diferencia de las ondas clásicas— adoptan valores complejos en cada punto en el espacio. Entre mayor sea el módulo cuadrado de tales valores complejos, será más probable encontrar a una partícula en una posición dada.

4.2.2. Ecuación de Schrödinger

Las ondas de materia —a diferencia de las ondas mecánicas— no requieren de un medio material para propagarse, no se rigen por el determinismo de la mecánica clásica y son un indicio del comportamiento ondulatorio de la materia, el cual puede ser descrito, matemáticamente, por la función de onda cuántica $\Psi(x, t)$.

El entendimiento de lo que es realmente la función de onda ha llevado a discusiones y al surgimiento de diversas corrientes (o interpretaciones) en la meca única cuántica. Por ejemplo, la descripción probabilística propuesta por Born, citada anteriormente, forma parte de la interpretación de Copenhague.

Ahora bien, la llamada ecuación de Schrödinger proporciona un marco en el que la evolución temporal de Ψ es siempre ondulatoria, mientras que el carácter corpuscular emerge exclusivamente en el proceso de medición, donde la distribución de resultados individuales sigue la distribución $|\Psi|^2$. Así, la evolución temporal de Ψ para una partícula en un potencial $V(x)$ se rige por la **ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo**:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Psi, \tag{8}$$

donde $\hbar = h/(2\varpi)$ es la constante de Planck reducida. Esta ecuación pone en evidencia una diferencia matemática importante entre las ondas mecánicas, que satisfacen la ecuación (2) para $y(x, t)$, y la función de onda $\Psi(x, t)$, pues la variación espacial de cada función se relaciona de manera distinta con su variación temporal.

Para estados estacionarios, es decir, aquellos para los que su energía E es constante, podemos escribir $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, obteniendo la **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\,\psi(x). \tag{9}$$

4.2.3. Comparación con la ecuación de onda clásica

La ecuación de Schrödinger (8) difiere fundamentalmente de la ecuación de onda clásica (2) en los siguientes aspectos:

1. **Orden en el tiempo**: La ecuación de Schrödinger es de **primer orden en el tiempo**, mientras que la ecuación de onda clásica es de segundo orden.
2. **Naturaleza de la solución**: La ecuación de Schrödinger está definida en los **números complejos** por lo que sus soluciones son funciones de onda complejas. La ecuación clásica generalmente describe cantidades reales.
3. **Relación de dispersión**: Para una partícula libre, es decir, que no interactúa con ningún otro objeto o sistema ($V = 0$), la función de onda $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$, con A un número diferente de cero. Si esta propuesta se sustituye en (8), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

la cual conduce a que la velocidad de fase sea

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m},$$

que **no** es la velocidad de la partícula, como en el caso clásico. Por el contrario, la velocidad de grupo se calcula como:

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m},$$

que sí corresponde a la velocidad clásica de la partícula.

4.3 Diferencias fundamentales entre ondas mecánicas y la función de onda

El estudio de las ondas en física abarca desde la descripción clásica de las perturbaciones en medios materiales hasta la función de onda en la mecánica cuántica. Mientras las ondas mecánicas se rigen por la ecuación de onda y describen fenómenos colectivos medibles directamente, las ondas de materia y la función de onda representan una evolución conceptual profunda: la naturaleza ondulatoria de partículas individuales y una descripción probabilística de la realidad física.

La ecuación de Schrödinger, que es lineal y está definida en los números complejos, difiere esencialmente de la ecuación de onda clásica, reflejando el carácter no intuitivo del mundo cuántico. La interpretación probabilística de Born, donde $|\Psi|^2$ representa densidad de probabilidad, marca un quiebre epistemológico con la física clásica, donde las ondas representan perturbaciones físicas directas.

Cuadro 1

Comparación entre las ondas mecánicas y la función de onda cuántica

Aspecto	Onda mecánica	Función de onda cuántica
Naturaleza física	Perturbación en un medio material medible directamente	Amplitud de probabilidad (entidad matemática abstracta)
Representación matemática	Función real $y(x, t)$	Función compleja $\Psi(x, t)$
Interpretación	Descriptiva directa del movimiento del medio	Probabilíistica: $\|\Psi\|^2$ = densidad de probabilidad
Ecuación gobernante	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (2º orden en tiempo)	$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$ (1º orden)
Transporte	Transporta energía y momento a través del medio	Describe evolución de proba- bilidades; la "partícula" puede estar localizada
Energía	Proporcional al cuadrado de la amplitud: $E \propto A^2$	Valor esperado: ⟨E⟩ = $\int \Psi * \hat{H} \Psi \mathrm{d}x$
Medio de propagación	Requiere medio material (excepto ondas EM en el vacío)	No requiere medio; es una propiedad intríinseca de la materia
Cuantización	No necesariamente cuantizada (ex- cepto en las ondas estacionarias)	Surge naturalmente de condi- ciones de contorno (niveles discretos de energía)
Superposición	Principio de superposición lineal	Principio de superposición e interferencia de amplitudes de probabilidad

Las ondas de De Broglie unifican conceptualmente la descripción de la materia y la radiación, aunque con interpretaciones físicas diferentes. Mientras que la física clásica proporciona descripciones deterministas, la mecánica cuántica ofrece predicciones probabilísticas, limitadas por el **principio de incertidumbre de Heisenberg.**

Este recorrido desde las ondas mecánicas hasta la función de onda cuántica ilustra la evolución del pensamiento físico y la capacidad de las matemáticas para describir realidades cada vez más abstractas y contraintuitivas.

REFERENCIAS

1. **Griffiths**, D. J. (2017). *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press.
2. **Griffiths**, D. J. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.
3. **French**, A. P. (1971). *Vibrations and Waves*. W.W. Norton & Company.
4. **Eisberg**, R., Resnick, R. (1985). *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nulei, and Particles*. John Wiley & Sons.
5. **de Broglie**, L. (1924). *Recherches sur la théorie des quanta*. Tesis doctoral, Universidad de París.
6. **Schrödinger**, E. (1926). An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review, 28*(6), 1049-1070.
7. **Born**, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik, 37*(12), 863-867.

Recepción: **Febrero 27, 2026** | Aceptación: **Agosto 13, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

Geodésicas nulas alrededor del Agujero Negro de Schwarzschild

Null geodesics around the Schwarzschild Black Hole

—

José Adrián Ramos Choque[1]
joseadrianramoschoque@gmail.com • ORCID: 0009-0002-5681-3150

Enrique Martínez Parra[2]
enmapa18@yahoo.com • ORCID: 0009-0001-7348-5753

Lourdes Susana Condolo Matailo[3]
lourdescondolo23@gmail.com • ORCID: 0009-0006-2264-4845

Luis Osvaldo Téllez Tovar[4]
osva117@hotmail.com • ORCID: 0000-0003-3316-4741

1 Universidad Nacional del Altiplano: Puno, Puno, PE.

2 Investigador independiente, Puno, Perú.

3 Investigadora independiente. Cuenca, Ecuador.

4 Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Para citar este artículo:
Ramos Choque, J. A., Martínez Parra, E., Condolo Matailo, L. S., & Téllez Tovar, L. O. Geodésicas nulas alrededor del Agujero Negro de Schwarzschild. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a02

RESUMEN

La Relatividad General (RG) de Einstein describe la gravedad como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Una de sus predicciones más fascinantes es la existencia de agujeros negros, objetos tan compactos que ni siquiera la luz puede escapar de su interior. Este artículo de revisión presenta un análisis introductorio de las geodésicas nulas (trayectorias de fotones) en el espacio-tiempo de Schwarzschild, la solución más elemental de las ecuaciones de Einstein en el vacío, que describe un agujero negro sin rotación ni carga. Se revisan los fundamentos de las ecuaciones de campo de Einstein y la métrica de Schwarzschild, destacando las propiedades del horizonte de eventos y la singularidad. El objetivo central es estudiar las trayectorias, o geodésicas, que sigue la luz en este entorno, el cual está determinado por el parámetro de impacto. Mediante el uso del método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden aplicado a la ecuación de la órbita, se analizan y discuten los tres regímenes posibles para un fotón: la desviación gravitacional, las órbitas circulares inestables en la esfera de fotones y la captura definitiva por el agujero negro. Los resultados de las simulaciones se presentan y contrastan con las predicciones teóricas. Finalmente, se discuten las implicaciones de estos hallazgos para la astrofísica moderna, como la sombra de los agujeros negros, y se señalan posibles direcciones para investigaciones futuras.

Palabras clave:

Relatividad general; agujero negro de Schwarzschild; geodésicas nulas; trayectorias de los fotones; lente gravitacional; método de Runge-Kutta

— Abstract—

Einstein's General Relativity (GR) describes gravity as a manifestation of spacetime curvature. One of its most fascinating predictions is the existence of black holes—objects so compact that not even light can escape from within them. This review article presents an introductory analysis of null geodesics (photon trajectories) in Schwarzschild spacetime, the simplest vacuum solution to Einstein's equations, describing a non-rotating, uncharged black hole. The fundamentals of Einstein's field equations and the Schwarzschild metric are reviewed, highlighting the properties of the event horizon and the singularity. The main objective is to study the paths, or geodesics, that light follows in this environment, which is determined by the impact parameter. By using the fourth-order Runge-Kutta numerical method applied to the orbit equation, the three possible regimes for a photon are analyzed and discussed: gravitational deflection, unstable circular orbits on the photon sphere, and capture by the black hole. Simulation results are presented and compared with theoretical predictions. Finally, the implications of these findings for modern astrophysics—such as black hole shadows—are discussed, and potential directions for future research are outlined.

Keywords:

General Relativity; Schwarzschild Black Hole; Null Geodesics; Photon Trajectories; Gravitational Lensing; Runge-Kutta Method.

RELATIVIDAD GENERAL

La Relatividad General es una teoría de la gravitación formulada por Albert Einstein (1915). A diferencia de la gravitación newtoniana, esta teoría interpreta la gravedad no como una fuerza, sino como una manifestación geométrica de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de masa y energía (Cheng, 2005).

Uno de sus pilares fundamentales es el principio de equivalencia, el cual establece que no es posible distinguir localmente entre un sistema de referencia acelerado y uno inmerso en un campo gravitacional. Este principio permite comprender que los efectos de la gravedad pueden describirse mediante una métrica, que es un objeto matemático que codifica toda la información sobre la geometría del espacio-tiempo. Permite calcular distancias, ángulos, y trayectorias. De este modo, los cuerpos no experimentan fuerzas gravitacionales, sino que siguen trayectorias determinadas por dicha geometría (Cheng, 2005; Wald, 1984; Carroll, 2019).

En Relatividad General, el movimiento de las partículas se describe mediante geodésicas, las cuales representan la trayectoria que debe seguir una partícula libre en presencia de un campo gravitacional.

ECUACIONES DE EINSTEIN

Las ecuaciones de campo de Einstein son la base matemática de la Relatividad General. Relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía. El físico John Wheeler (1990) lo resumió así: «El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse».

Las ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

donde $G_{\mu\nu}$, el Tensor de Einstein, representa la geometría del espacio-tiempo. Está dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2}$$

Con $R_{\mu\nu}$, conocido como el Tensor de Ricci; y R, llamado Escalar de curvatura, que describen la curvatura de una región en presencia de la gravedad; $g_{\mu\nu}$, también llamado Tensor métrico, es la «regla» que define las distancias y el tiempo en el universo. $T_{\mu\nu}$ es el Tensor de Energía-Impulso que describe el contenido de materia y energía en el espacio-tiempo que producen el campo gravitacional. G es la Constante de Gravitación Universal con un valor de 6.674×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} y c es la velocidad de la luz en el vacío, cuyo valor es de 2.998×10^8 m/s.

La expresión (1) es la forma compacta de las ecuaciones de la Relatividad General, nos muestra, del lado izquierdo, la geometría del espacio y, del lado derecho, describe la masa y la energía presentes. Esta expresión se puede desarrollar considerando lo siguiente:

- Los Índices y la Dimensión: Los índices griegos μ y v son etiquetas que representan las dimensiones del espacio-tiempo: 0,1,2,3 donde 0 es el tiempo y 1,2,3 son las dimensiones espaciales *x, y, z*.
- Cada índice puede tomar diferentes valores. Sin embargo, en este trabajo se consideran 4 dimensiones. Al tener dos índices independientes, la expresión representa una matriz de 4×4. Esto nos da 16 ecuaciones. Como los tensores $G_{\mu v} = G_{v\mu}$ son simétricos, la ecuación para la componente (1,2) es la misma que para el (2,1). Por eso, en la práctica, se reducen a 10 ecuaciones independientes:

Tipo de Componentes	Combinaciones (μ, v)	Cantidad	Descripción
Componente Temporal	(0, 0)	1	Relaciona la curvatura con la densidad de energía total. Es el límite donde se recupera la gravedad Newtoniana.
Componentes Mixtos	(0, 1),(0, 2),(0, 3)	3	Describen el flujo de energía (momento). Representan cómo el movimiento de la masa arrastra el espacio-tiempo.
Componentes Diagonales	(1, 1),(2, 2),(3, 3)	3	Relacionan la curvatura con la presión en las tres direcciones espaciales.
Componentes de Cizalla	(1, 2),(1, 3),(2, 3)	3	Representan los esfuerzos cortantes (fuerzas que deforman el espacio-tiempo de forma no diagonal).

AGUJEROS NEGROS

La solución de Schwarzschild fue la primera solución exacta encontrada a las ecuaciones de campo de Einstein. El astrofísico y matemático alemán Karl Schwarzschild la descubrió en 1916, mientras servía en el frente ruso durante la Primera Guerra Mundial (Rodríguez, 2017). A pesar de las condiciones adversas, Schwarzschild logró resolver las complejas ecuaciones para el caso de un cuerpo esférico, estático y sin carga. Su trabajo demostró la existencia teórica de lo que luego se llamaría agujero negro y sentó las bases para el estudio de la física de los objetos compactos (Shapiro & Teukolsky, 1983). Aunque el resultado de la solución dada por Schwarzschild podía aplicarse a la descripción de cuerpos como el sistema solar también explicaba la física de los agujeros negros, esto último, aunque era obvio, ni Einstein ni Schwarzschild lo sabían en ese momento (Shapiro & Teukolsky, 1983). Reciben el nombre de agujero negro porque, debido a la gran cantidad de masa

que poseen, generan un campo gravitacional tan fuerte que ni la luz puede escapar de él (Carnalla-Martinez & de Ciencia, 2025; Percy, 1993).

Características principales de los agujeros negros

- **Horizonte de Eventos:** Superficie esférica que marca el "punto de no retorno". Es el límite a partir del cual la velocidad de escape supera la velocidad de la luz. Para un observador externo, el tiempo se dilata infinitamente para los objetos que se acercan al horizonte (Percy, 1993).
- **Singularidad**: Punto central de densidad donde las leyes de la física conocida dejan de ser aplicables. Está oculta tras el horizonte de eventos (Conjetura de censura cósmica) (Percy, 1993).
- **Disco de Acreción**: Remolino de gas, polvo y plasma que orbita a altas velocidades alrededor del agujero negro. El material se calienta por fricción y emite radiación rayos X antes de cruzar el horizonte de eventos (Kazmierczak & Team, 2025).
- **Ergosfera**: en agujeros negros rotantes la región exterior al horizonte donde el espacio-tiempo es arrastrado por la rotación del agujero. Es posible extraer energía de esta región a través del proceso de Penrose (Meringolo et al., 2025).

Clasificación de los agujeros negros por Masa

- **Microagujeros Negros**: Tamaño subatómico. Objetos teóricos predichos por algunos modelos cosmológicos (Percy, 1993).
- **Agujeros Negros Estelares**: Masas entre 3 y 50 masas solares (Baird, 2022). Se forman por el colapso gravitacional de estrellas masivas al final de su vida.
- **Agujeros Negros de Masa Intermedia**: Masas entre 50 a 50000 masas solares (Baird, 2022). Su origen es aún objeto de estudio, ya que se cree que deben existir como eslabón perdido en la evolución desde los agujeros negros estelares de pocas masas solares hasta los supermasivos de millones de masas solares. Aunque su detección es esquiva, algunas hipótesis apuntan a que podrían formarse por la colisión y fusión de varios agujeros negros estelares o por el colapso directo de cúmulos estelares masivos.
- **Agujeros Negros Supermasivos**: Masas de 10^6 a 10^{10} masas solares. Se hallan en el centro de la mayoría de las galaxias incluida la Vía Láctea, el cual se conoce como Sagitario A^* (Wald, 1984).

MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

La importancia de la métrica de Schwarzschild radica en que es la primera solución a las ecuaciones de la Relatividad General. Esta métrica describe la geometría del espacio-tiempo alrededor de una masa esféricamente simétrica, estática y sin carga eléctrica (Schwarzschild, 1916). En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ), donde t es el tiempo, r es la coordenada radial que representa la distancia hacia el agujero negro medida a partir de su centro, y (θ, ϕ) son las coordenadas angulares. El elemento de línea, que se obtiene a partir de la métrica y nos dice cómo medir distancia en el espacio-tiempo bajo estudio, se escribe como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \qquad (3)$$

El término $f(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$, donde M es la masa del agujero negro, cuantifica la desviación del espacio-tiempo respecto a la geometría plana de Minkowski. Este factor aparece tanto en el coeficiente temporal g_{tt} como en el coeficiente radial g_{rr} a través de su inverso. Para distancias muy grandes del agujero negro, la métrica se aproxima a la de Minkowski en coordenadas esféricas, recuperándose así el límite newtoniano de la gravedad. La métrica presenta singularidades matemáticas en puntos específicos que requieren análisis detallado.

Si hacemos $f(r)$ igual con cero y despejamos r obtenemos la solución conocida como el radio de Schwarzschild:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Si sustituimos este valor en la componente radial de la métrica obtendremos una división entre cero, lo que significa que el valor de la métrica en ese punto está indeterminado.

$$g_{rr}(r_s) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_s}\right)^{-1} = \frac{1}{f(r_s)} = \frac{1}{0} \qquad \text{(indeterminado)}$$

Esta divergencia indica una singularidad de coordenadas, no física, que puede eliminarse mediante un cambio adecuado de coordenadas (como las coordenadas de Kruskal-Szekeres) (Wald, 1984). El horizonte de eventos es precisamente la superficie esférica definida por $r = r_s$.

Por otro lado, en el centro del agujero negro ($r = 0$), encontramos una singularidad física real o de curvatura que, a diferencia de la singularidad en el horizonte de eventos, no puede eliminarse con un cambio de coordenadas. Esto indica que la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita. Es en este punto donde la teoría de la Relatividad General alcanza su límite de validez al no poder describir coherentemente las condiciones físicas en la singularidad (Carroll, 2019).

Geodésicas en el Agujero Negro de Schwarzschild

En un espacio-tiempo curvo, una geodésica es el camino o trayectoria que sigue una partícula sobre la que no actúan fuerzas, moviéndose únicamente bajo la influencia de la geometría del espacio-tiempo (Wald, 1984). A la trayectoria descrita por una partícula sin masa, como los fotones que componen la luz, se le conoce como geodésica nula. En este trabajo nos enfocamos en geodésicas nulas porque si conocemos el comportamiento de la luz podemos determinar propiedades importantes de un agujero negro, como el que se encuentra en el centro de nuestra galaxia, o probar la validez de la Teoría General de la Relatividad.

Existe una órbita circular inestable para fotones en $r = 3GM/c^2 = 1.5\ r_s$. Se dice que es inestable porque cualquier pequeña perturbación, por ejemplo, un fotón que no llegue con el ángulo o energía exactos, hará que este se escape al infinito o caiga hacia el horizonte de eventos, en lugar de permanecer en una órbita cerrada. Si un fotón cruza el horizonte de eventos ($r < r_s$), inevitablemente cae hacia la singularidad.

De manera general, la ecuación que describe el movimiento de una partícula alrededor de un agujero negro es (Cerón Ángeles et al., 2025):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -\frac{u^2}{2}\frac{df(1/u)}{du} - uf(1/u) \tag{4}$$

Donde u=1/r es la inversa de la coordenada radial, ϕ es la coordenada angular azimutal, que parametriza la órbita en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) y $f(1/u)$ es el término de la métrica bajo estudio. Para el caso de Schwarzschild, la ecuación queda como:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3Mu^2 \tag{5}$$

Al ser una ecuación diferencial de segundo orden, necesitamos dos condiciones iniciales para resolverla. Estas son

$$u_0 = \frac{1}{r_0} \tag{6}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 f\left(\frac{1}{u}\right)} \tag{7}$$

Donde r_o es la distancia a la que se encuentra el fotón respecto del centro del agujero negro, $b = L/E$ se define como el parámetro de impacto definido como la distancia perpendicular entre la trayectoria inicial del fotón y la línea paralela que pasa por el centro del agujero negro y que, como veremos más adelante, nos da información sobre la trayectoria de la partícula, E es la energía y L es el momento angular.

Resolver a mano este tipo de ecuaciones diferenciales no es sencillo, por esa razón recurrimos a algoritmos computacionales. En este caso usamos el método de Runge-Kutta que tiene su nombre en honor a sus creadores. Es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y está basado en el algoritmo de "un paso", ya que cada aproximación se basa en el paso anterior y la precisión depende de las aproximaciones de los puntos usados para obtener el resultado final (Butcher, 2000). Debido a su estabilidad numérica y alta precisión, además de no depender de derivadas de órdenes altos, este método es ideal para programarse en computadora.

Si graficamos la solución de la ecuación diferencial anterior podemos obtener la trayectoria del fotón alrededor del agujero negro. En la Figura 1 se muestra una geodésica nula en coordenadas polares (r, ϕ) para un fotón con parámetro de impacto $b > b_c$ en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Donde b_c es el párametro de impacto crítico, valor en el que tendremos órbitas circulares inestables y que se obtiene de igualar la ecuación (7) con cero y resolver para b. La curva negra representa la trayectoria calculada a partir de la ecuación de órbita, mientras que el círculo púrpura semitransparente indica la región del horizonte de eventos en $r = r_s$. Al aproximarse al objeto masivo, el rayo de luz experimenta una desviación gravitacional, manteniendo una distancia superior al radio de la esfera de fotones (r > 3M). La geodésica permanece siempre fuera del horizonte (región de no retorno), alcanza una distancia cercana a r_s y luego se aleja hacia el infinito.

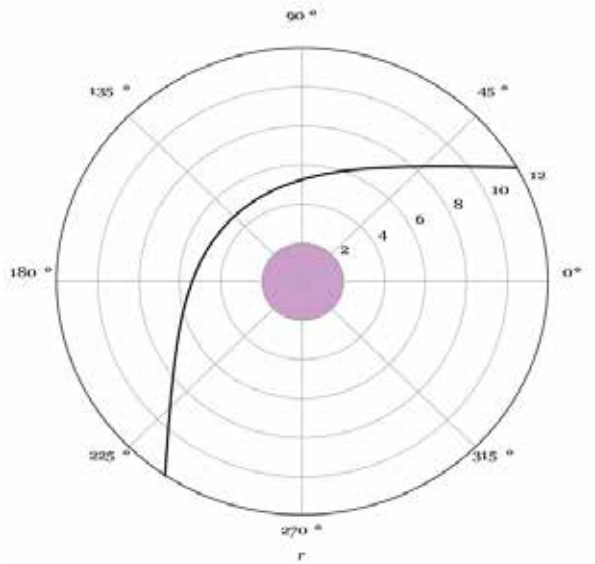


Figura 1. Geodésica nula con $b > b_c$ mostrando desviación gravitacional. La trayectoria se acerca al agujero negro, pero logra escapar de las cercanías del agujero negro

En la Figura 2 se presenta una geodésica nula para un fotón con parámetro de impacto $b = b_c$. El rayo de luz, fuertemente desviado por la curvatura, se aproxima a la esfera de fotones en r = 3M, donde completa múltiples órbitas alrededor del

objeto masivo antes de escapar. Este comportamiento evidencia la órbita circular inestable para fotones: un fotón con el parámetro de impacto exactamente crítico podría orbitar infinitamente en r = 3M, pero cualquier pequeña perturbación lo lleva a escapar o ser capturado. Las múltiples órbitas observadas reflejan la alta sensibilidad a las condiciones iniciales en este régimen crítico.

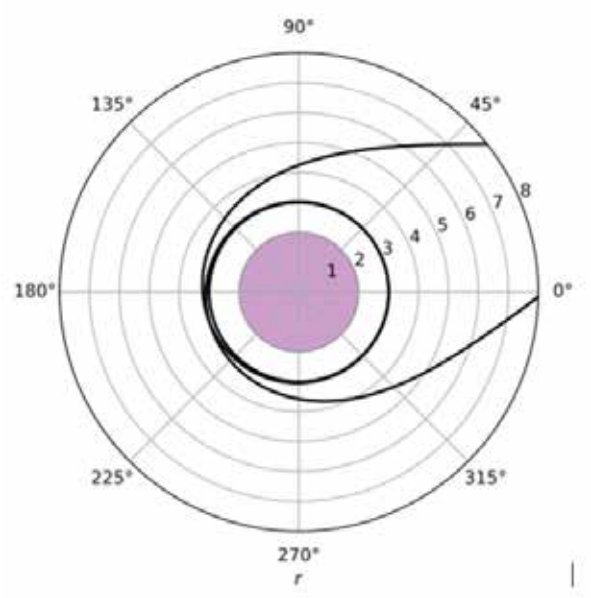


Figura 2. Geodésica nula con $b = b_c$ mostrando órbitas múltiples alrededor del agujero negro en las cercanías de la esfera de fotones

En la Figura 3 se muestra una geodésica para un fotón con parámetro de impacto $b < b_c$. La partícula, proveniente desde una distancia muy lejana al agujero negro, posee energía suficiente para superar la barrera del potencial efectivo, cruzando sin retorno el horizonte de eventos (área púrpura) y prosiguiendo inexorablemente hacia la singularidad central en r = 0. Este régimen ilustra el concepto de agujero negro como región de no retorno: al ser el parámetro de impacto inferior al crítico, la curvatura extrema del espacio-tiempo impide toda deflexión hacia el exterior, condenando al rayo de luz a ser absorbido definitivamente sin posibilidad de escape.

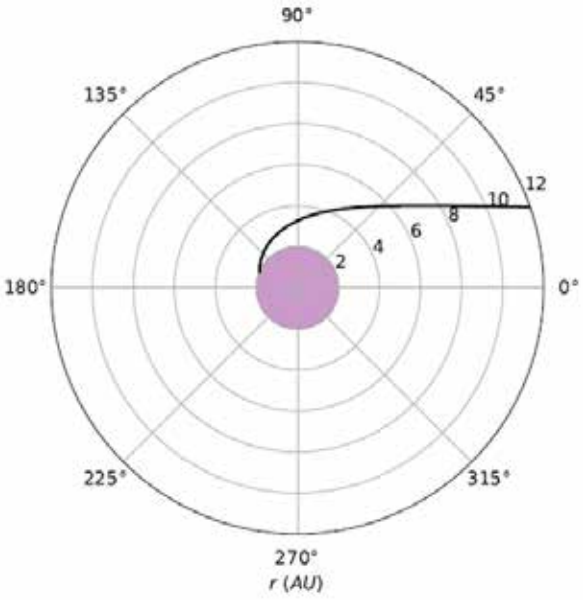


Figura 3. Geodésica nula con $b < b_c$ mostrando captura por el agujero negro. La partícula cruza el horizonte de eventos y cae hacia la singularidad

CONCLUSIONES

La Relatividad General, formulada por Albert Einstein, revolucionó la comprensión de la gravedad ya que la física newtoniana no puede explicarla completamente. Pasó de ser una fuerza a ser la curvatura del espacio-tiempo causada por la masa y la energía, mostrando así que la materia determina la curvatura y esta, a su vez, guía el movimiento de los cuerpos mediante geodésicas.

La solución a las ecuaciones de Einstein encontradas por Karl Schwarzschild demostró la existencia teórica de los agujeros negros, las órbitas circulares inestables para fotones y de una última órbita circular estable para partículas masivas que refleja la estructura no lineal de la ecuación orbital relativista. Estos resultados ilustran de manera explícita cómo la curvatura modifica sustancialmente la dinámica clásica y establece umbrales críticos en la evolución orbital. Schwarzschild confirma que la geometría determina completamente la dinámica de partículas.

Para comprender el comportamiento de partículas y fotones en las cercanías de un agujero negro, es necesario el estudio de las geodésicas nulas que permiten describir formalmente el horizonte de eventos y el radio de Schwarzschild (r_s). El análisis de la métrica de Schwarzschild evidencia la diferencia entre una singularidad de coordenadas en el horizonte de eventos y una singularidad física real (en r = 0), donde la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita y la teoría alcanza su límite de validez.

A partir de la ecuación (4), usando la métrica de Schwarzschild, podemos obtener la ecuación diferencial que describe la geodésica que sigue un fotón alrededor

del agujero negro antes mencionado. Es importante mencionar que esta es una ecuación diferencial de segundo orden por lo que no es sencillo resolverla de manera analítica. Esto nos obliga a usar métodos numéricos. En este trabajo usamos el método de Runge-Kutta que, al graficar sus resultados, pudimos simular cómo sería el movimiento del fotón alrededor del agujero negro para distintos valores de la masa de dicho objeto, así como del parámetro de impacto. Observamos que la trayectoria de un fotón está determinada por el valor del mencionado parámetro de impacto que, a su vez, depende de las características propias del sistema como la energía y el momento angular. Encontramos un valor crítico del parámetro de impacto tal que existen órbitas circulares inestables alrededor del agujero negro, es decir, que cualquier pequeña perturbación puede hacer que el fotón caiga hacia el agujero negro o sea disparado lejos de él. Por otro lado, si el parámetro de impacto es mayor que el valor crítico, el fotón será desviado de su trayectoria original. Sin embargo, esté se alejará del agujero negro, es decir, nunca caerá en él. Finalmente, si el parámetro de impacto es menor que el valor crítico, el fotón caerá al agujero negro sin ninguna posibilidad de escapar.

REFERENCIAS

Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 844–847.

Baird, C. S. (2022). *Are there different types of black holes?* West Texas A&M University. https://www.wtamu.edu/~cbaird/sq/2022/08/02/are-there-different-types-of-black-holes/

Butcher, J. C. (2000). Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 125*(1–2), 1–29. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00455-6

Carnalla-Martínez, C. (2025). *¿Qué son los agujeros negros?*

Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Cambridge University Press.

Cerón Ángeles, V. E., Pedraza Ortega, O., Escorcia Ramírez, R. G., & Téllez Tovar, L. O. (2025). Geodésicas de un agujero negro de Schwarzschild modificado. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI, 13*, 8–13.

Chandrasekhar, S. (1983). *The mathematical theory of black holes.* Oxford University Press.

Cheng, T.-P. (2005). *Relativity, gravitation and cosmology: A basic introduction*. Oxford University Press.

Kazmierczak, J., & NASA Team. (2025). *Black holes*. NASA. https://science.nasa.gov/universe/black-holes/

Mach, E. (1915). *The science of mechanics: A critical and historical account of its development*. Open Court Publishing Company.

Meringolo, C., Camilloni, F., & Rezzolla, L. (2025). Electromagnetic energy extraction from Kerr black holes: Ab initio calculations. *The Astrophysical Journal Letters, 992*(1), L8Percy, J. (1993). Agujeros negros. Astronomical Society of the Pacific.

Rodríguez, A. L. (2017). *Licenciatura en física: Trabajo de diploma.*

Shapiro, S. L., & Teukolsky, S. A. (1983). *Black holes, white dwarfs, and neutron stars.*

Schwarzschild, K. (1916). Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik, 355*(9), 106–120.

Wald, R. M. (1984). *General relativity*. University of Chicago Press.

Wheeler, J. A. (1990). *A journey into gravity and spacetime*. Scientific American Library.

Recepción: **Marzo 17, 2026** | Aceptación: **Julio 31, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

Grafeno y sus aplicaciones: 20 años de aventuras

Graphene and its applications: 20 years of adventures

—

Frank Joel Villacis Amaya[1]
joel-frank.v@hotmail.com • ORCID: 0009-0002-0416-745X

Zurisaddai Aram Romero[2]
aram.romero2@gmail.com • ORCID: 0009-0007-5060-5146

Alfredo Raya[3]
alfredo.raya@umich.mx • ORCID: 0000-0002-5394-8634

1 Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador.

2 Universidad del Valle de Atemajac, Zamora de Hidalgo, Michoacán, México.

3 Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Morelia, Michoacán, México.

Para citar este artículo:
Villacis Amaya, F. J., Aram Romero, Z., & Raya, A. Grafeno y sus aplicaciones: 20 años de aventuras. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a03

RESUMEN

El grafeno es un material bidimensional constituido por una monocapa de átomos de carbono organizados en una red hexagonal, con un grosor aproximado al diámetro de un solo átomo. Aislado por primera vez en 2004 por André Geim y Konstantin Novoselov —trabajo que les valió el Premio Nobel de Física en 2010—, el grafeno concentró de inmediato la atención de la comunidad científica internacional por sus propiedades extraordinarias. Estas incluyen resistencia mecánica excepcional, conductividad eléctrica y térmica sobresalientes, transparencia óptica casi total y una estabilidad química notable. Este artículo ofrece una revisión introductoria de los fundamentos físicos que explican tales propiedades, desde la teoría de bandas y la analogía con partículas relativistas hasta los fenómenos cuánticos que distinguen al grafeno de cualquier otro material conocido. Se describen los principales métodos de obtención —tanto los enfoques de arriba hacia abajo (top-down) como los de abajo hacia arriba (bottom-up)— y se presentan las aplicaciones tecnológicas más relevantes, incluyendo electrónica de alta frecuencia, sensores biomédicos, almacenamiento de energía y electrónica flexible. Asimismo, se analiza la evolución de las expectativas científicas y comerciales en torno al material, ubicándolas en el marco del ciclo de sobreexpectación de Gartner, y se reflexiona sobre las perspectivas reales que el grafeno ofrece de cara al futuro inmediato.

Palabras clave:

Grafeno; propiedades físicas; síntesis; fermiones de Dirac; aplicaciones tecnológicas; materiales bidimensionales.

— Abstract—

Graphene is a two-dimensional material consisting of a single layer of carbon atoms arranged in a hexagonal lattice, with a thickness approximately equal to the diameter of a single atom. First isolated in 2004 by André Geim and Konstantin Novoselov—work that earned them the Nobel Prize in Physics in 2010—graphene immediately attracted the attention of the international scientific community due to its extraordinary properties: exceptional mechanical strength, outstanding electrical and thermal conductivity, near-total optical transparency, and remarkable chemical stability. This article provides an introductory review of the physical principles underlying these properties, from band theory and the analogy with relativistic particles to the quantum phenomena that set graphene apart from any other known material. The main synthesis methods are described—both top-down and bottom-up approaches—along with the most relevant technological applications, including high-frequency electronics, biomedical sensors, energy storage, and flexible electronics. The evolution of scientific and commercial expectations surrounding the material is also analyzed within the framework of the Gartner hype cycle, and the realistic prospects graphene offers for the near future are examined.

Keywords:

Graphene; physical properties; synthesis; Dirac fermions; technological applications; two-dimensional materials.

El carbono es, quizás, el elemento más versátil de la tabla periódica. A lo largo de siglos de investigación científica, se han descubierto y estudiado distintas formas en que los átomos de carbono pueden organizarse para dar lugar a materiales con características radicalmente diferentes: el diamante, conocido por su dureza extrema y su transparencia; el grafito, utilizado en lápices y electrodos; los fullerenos, moléculas esféricas de carbono que revolucionaron la química a finales del siglo XX; y los nanotubos de carbono, cuya resistencia mecánica y conductividad eléctrica los colocaron en el centro de las investigaciones en nanotecnología. Sin embargo, ninguno de estos alótropos había revelado plenamente la riqueza que se esconde en una sola capa atómica de carbono, lo que hoy conocemos como grafeno (Novoselov et al., 2004).

El aislamiento experimental del grafeno en 2004 representó mucho más que un logro técnico. Reveló que es posible la existencia estable de un cristal estrictamente bidimensional —una realidad que durante décadas se había considerado termodinámicamente imposible— y abrió una ventana hacia un régimen físico completamente nuevo, en el que conceptos propios de la física de partículas elementales aparecen de forma inesperada en un material que puede manipularse con instrumentos de laboratorio convencionales (Geim & Novoselov, 2007). André Geim y Konstantin Novoselov, físicos de la Universidad de Manchester, recibieron el Premio Nobel de Física en 2010 por este descubrimiento.

Desde el punto de vista físico, el grafeno es fascinante precisamente porque en él convergen disciplinas que usualmente se estudian por separado: la teoría cuántica de campos, la mecánica cuántica de muchos cuerpos, la física del estado sólido y, de manera sorprendente, la teoría de la relatividad especial. Esta confluencia no es una mera analogía matemática, sino una consecuencia directa de la estructura cristalina del material, que impone a los electrones una dinámica efectiva descrita por ecuaciones relativistas, a pesar de que su velocidad es muy inferior a la de la luz (Castro Neto et al., 2009).

El objetivo de este artículo es presentar, con rigor conceptual y claridad divulgativa, las propiedades físicas que distinguen al grafeno, el marco teórico que las sustenta y las implicaciones tecnológicas que se derivan de ellas. Para lograrlo, el texto se organiza de la siguiente manera. Primero se describe la estructura cristalina del grafeno y sus consecuencias en la teoría de bandas. A continuación, se exploran sus propiedades mecánicas, electrónicas, térmicas y ópticas. Después se discuten los principales métodos de síntesis y producción. Finalmente, se revisan las aplicaciones actuales y emergentes, y se reflexiona sobre el estado real del material en el panorama tecnológico contemporáneo.

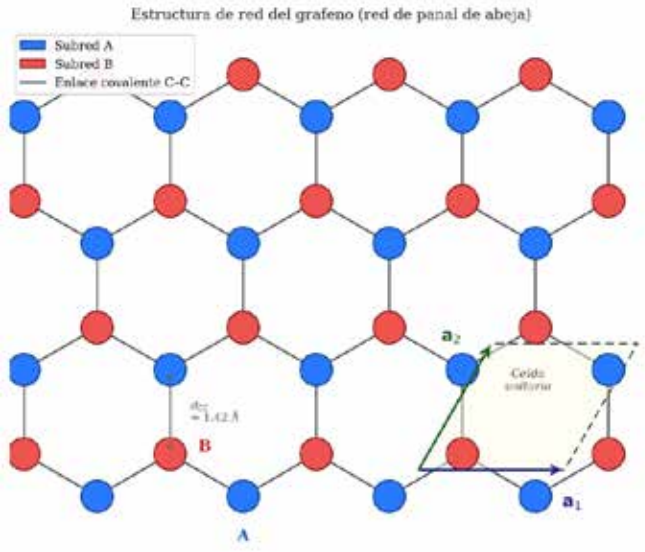


Figura 1. Estructura de red hexagonal del grafeno (red de panal de abeja). Los átomos de carbono se representan mediante círculos de color, que distinguen las dos subredes triangulares no equivalentes: en azul los de la subred A y en rojo los de la subred B; las líneas indican los enlaces covalentes σ. Se destacan los vectores primitivos a_1 y a_2 de la celda unitaria, así como los dos átomos no equivalentes A y B de la base. Fuente: Elaboración propia con base en Castro Neto et al. (2009)

1. ESTRUCTURA CRISTALINA: LA RED DE PANAL DE ABEJA

Para comprender por qué el grafeno se comporta de manera tan distinta a otros materiales, es necesario comenzar por su estructura cristalina. El grafeno consiste en una red bidimensional de átomos de carbono dispuestos en un patrón hexagonal que recuerda a un panal de abejas Figura 1). Este arreglo, denominado red de panal de abeja (*honeycomb lattice*), no es una red de Bravais simple, sino una red triangular con una base de dos átomos no equivalentes, convencionalmente designados como A y B. Esta distinción es fundamental: los dos sitios de la red son equivalentes desde el punto de vista energético, pero no desde el geométrico, y esa diferencia tiene consecuencias profundas en el comportamiento electrónico del material (Wallace, 1947; Castro Neto et al., 2009).

La constante de red del grafeno —la distancia entre átomos más próximos— es de aproximadamente 1.42 Å (0.142 nm), y los enlaces que mantienen unidos a los átomos en el plano son del tipo sp^2, uno de los tipos de enlace covalente más fuertes que existen en la naturaleza. Cada átomo de carbono forma tres enlaces σ con sus vecinos más cercanos, utilizando tres de sus cuatro electrones de valencia. El cuarto electrón ocupa un orbital *p* perpendicular al plano del material y participa en la formación de bandas π, que son precisamente las responsables de las propiedades electrónicas extraordinarias del grafeno.

El enlace covalente sp^2 no solo confiere al grafeno su notable resistencia mecánica, sino que también define la geometría perfectamente plana de la lámina en condiciones ideales. En la práctica, sin embargo, el grafeno libre exhibe pequeñas

ondulaciones espontáneas de escala nanométrica, conocidas como corrugaciones, cuya importancia termodinámica se discutirá más adelante. La combinación de un plano casi perfecto con una red altamente simétrica es la base de las demás propiedades del material.

2. MARCO FÍSICO: DE LA TEORÍA DE BANDAS A LA RELATIVIDAD EFECTIVA

2.1 La teoría de bandas y el gap de energía

Para apreciar lo que hace al grafeno singular, conviene situarlo en el contexto de la física del estado sólido. Cuando millones de átomos se organizan en una red cristalina periódica, los niveles de energía discretos de los átomos aislados se ensanchan y dan lugar a bandas de energía continuas. La teoría de bandas, desarrollada a lo largo del siglo XX, describe cómo se distribuyen y se pueblan estas bandas y, en consecuencia, si un material conduce la electricidad o no (Kittel, 2005).

En un metal, la banda de conducción —la banda de energías más altas ocupadas por electrones— está parcialmente llena, lo que permite que estos se muevan libremente bajo la acción de un campo eléctrico. En un aislante, existe una brecha de energía prohibida (gap) grande entre la banda de valencia completamente llena y la banda de conducción completamente vacía. Los semiconductores son casos intermedios en los que el gap es moderado: a temperatura ambiente, una pequeña fracción de electrones puede cruzarlo por agitación térmica, dotando al material de una conductividad limitada pero controlable. El silicio, material fundamental de la electrónica moderna, es el ejemplo por excelencia de un semiconductor.

El grafeno ocupa una categoría sin precedentes en esta clasificación. Su gap de energía es nulo: la banda de valencia y la banda de conducción se tocan en puntos específicos del espacio recíproco, pero sin solaparse. Esto lo convierte técnicamente en un semimetal, aunque su comportamiento electrónico en esos puntos de contacto es tan inusual que merece una descripción completamente distinta.

2.2 Los puntos de Dirac y la dispersión lineal

La zona de Brillouin del grafeno —la celda unitaria en el espacio recíproco— es hexagonal, y en sus vértices se encuentran los denominados puntos de Dirac, designados K y K' (también conocidos como valles). Además de los vértices, la Figura 2 identifica otros dos puntos de alta simetría de la zona de Brillouin: el centro, denotado Γ, que corresponde a momento nulo ($k = 0$), y los puntos M, situados en los puntos medios de las aristas del hexágono, que corresponden a los puntos de silla de la estructura de bandas donde se localizan las singularidades de van Hove. Cerca de estos puntos, la relación entre la energía E y el momento k de los electrones no sigue la dependencia cuadrática habitual que se observa en la mayoría de los materiales:

$$E = \hbar^2 k^2/(2m^*) \quad (1) \qquad (1)$$

sino que es lineal:

$$E = \pm \hbar \, v_F |k| \quad (2) \qquad (2)$$

donde $_{vF} \approx 10^6$ m/s es la velocidad de Fermi del grafeno, aproximadamente 300 veces menor que la velocidad de la luz, y k es el vector de onda medido desde el punto de Dirac. Esta dispersión lineal es la firma característica de las partículas relativistas sin masa descritas por la ecuación de Dirac, razón por la cual los portadores de carga en el grafeno —tanto electrones como huecos— se denominan fermiones de Dirac sin masa efectiva (Novoselov et al., 2005; Zhang et al., 2005).

Es fundamental subrayar que los electrones del grafeno no se vuelven relativistas en el sentido convencional: su velocidad real es muy inferior a la de la luz y su masa en reposo, en términos absolutos, es la misma que en cualquier otro material. Lo que ocurre es que su dinámica efectiva dentro del cristal —la forma en la que responden a fuerzas externas y se propagan por la red— obedece ecuaciones matemáticamente idénticas a las de partículas que viajan a la velocidad de la luz. Esta analogía no es trivial: tiene consecuencias experimentales verificables y convierte al grafeno en un laboratorio accesible para explorar fenómenos de la física de altas energías en condiciones de temperatura ambiente (Katsnelson, 2012).

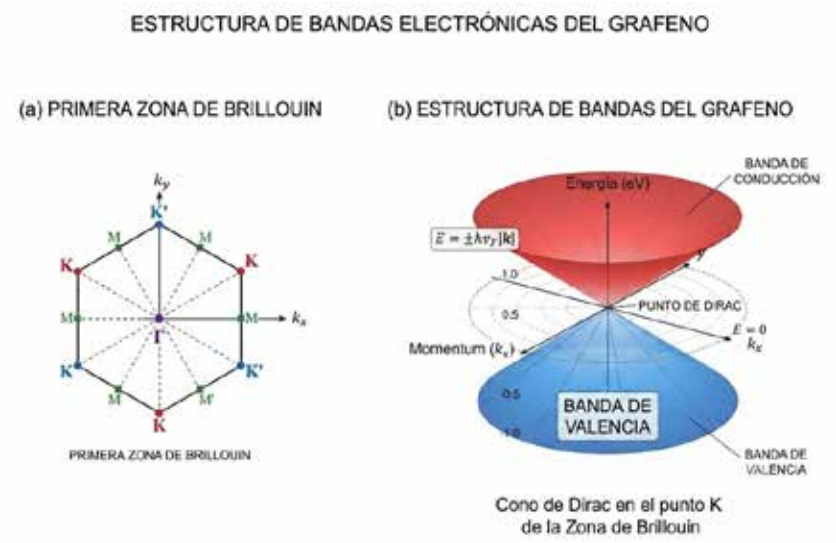


Figura 2. Estructura de bandas del grafeno. Se muestra la zona de Brillouin hexagonal con los puntos K y K'. En la ampliación se ilustra el cono de Dirac: la dispersión lineal de energía en función del momento cercano a un punto K, con la banda de valencia (cono inferior) y la banda de conducción (cono superior) tocándose en el punto de Dirac. Fuente: Elaboración propia con base en Castro Neto et al. (2009)

2.3 El grafeno como laboratorio de física relativista

La analogía relativista del grafeno tiene consecuencias observables. Una de las más llamativas es el efecto túnel de Klein, predicho originalmente por el físico Oskar Klein en 1929 para partículas relativistas. Klein demostró que, a diferencia de los electrones ordinarios —que tienen una probabilidad exponencialmente pequeña de atravesar una barrera de potencial alta y ancha—, los fermiones relativistas sin masa pueden cruzar barreras de potencial arbitrariamente altas con probabilidad de transmisión prácticamente igual a uno (Klein, 1929). En el grafeno, este fenómeno se manifiesta como la imposibilidad de confinar electrones mediante barreras electroestáticas convencionales, lo cual tiene implicaciones importantes para el diseño de transistores basados en este material (Katsnelson et al., 2006).

Otro fenómeno de naturaleza cuántica que distingue al grafeno es el efecto Hall cuántico. En materiales convencionales, este efecto —la aparición de una resistencia transversal cuantizada bajo la acción de un campo magnético intenso— solo se observa a temperaturas criogénicas. En el grafeno, puede detectarse incluso a temperatura ambiente, lo que refleja la robustez de los estados cuánticos asociados a su estructura de bandas (Novoselov et al., 2007). Más aún, el grafeno exhibe una versión anómala de este efecto, con secuencias de cuantización diferentes a las de los materiales convencionales, atribuibles a la naturaleza Dirac de sus portadores.

Esta correspondencia convierte al grafeno en algo más que una curiosidad conceptual: lo transforma en un laboratorio de mesa donde predicciones de la electrodinámica cuántica, difíciles o imposibles de someter a prueba en los aceleradores de partículas, se vuelven accesibles con instrumentación de estado sólido. El Zitterbewegung —el temblor cuántico que la teoría de Dirac atribuye a las partículas relativistas—, la polarización del vacío en torno a una carga y la propia paradoja de Klein encuentran en las láminas de carbono una realización experimental a energías ordinarias y temperatura ambiente. En este sentido el material actúa como un puente entre la física de la materia condensada y la física de altas energías, en el que ideas concebidas para el mundo subatómico pueden contrastarse sobre una mesa de laboratorio (Katsnelson & Novoselov, 2007).

3. PROPIEDADES FÍSICAS FUNDAMENTALES DEL GRAFENO

3.1 Propiedades electrónicas: movilidad y transporte

Una de las características más extraordinarias del grafeno desde el punto de vista tecnológico es su movilidad electrónica: la facilidad con que los portadores de carga aceleran en respuesta a un campo eléctrico. La movilidad se mide en unidades de $cm^2/(V•s)$, y el silicio —el material más utilizado en electrónica— presenta valores típicos de alrededor de 1400 $cm^2/(V•s)$ para los electrones. En grafeno de alta calidad, a temperatura ambiente y sobre un sustrato de SiO_2, se han medido

movilidades de hasta 10000 $cm^2/(V•s)$, y en muestras suspendidas —sin contacto con ningún sustrato— se han alcanzado valores superiores a 200000 $cm^2/(V•s)$.

Esta movilidad extraordinaria se origina en dos factores: la baja dispersión de los electrones —producida por la casi perfecta regularidad de la red cristalina y la ausencia de impurezas en muestras de alta calidad— y la velocidad de Fermi elevada inherente a la dispersión lineal. Una consecuencia directa es el transporte balístico: en muestras suficientemente puras y a escalas del orden de la micra, los electrones pueden recorrer distancias apreciables sin sufrir colisiones significativas con defectos o vibraciones de la red (fonones). Este régimen permite estudiar fenómenos cuánticos coherentes de gran interés fundamental y abre la puerta al diseño de dispositivos electrónicos de consumo energético muy bajo.

3.2 Propiedades mecánicas: el material más resistente conocido

El grafeno ostenta un módulo de Young de aproximadamente 1.0 TPa, lo que lo sitúa como uno de los materiales estructuralmente más rígidos que se conocen, superior al acero en aproximadamente dos órdenes de magnitud cuando se normaliza por la densidad superficial. Esta rigidez extrema es consecuencia directa de la fortaleza de los enlaces covalentes C-C de tipo sp^2, que requieren cantidades considerables de energía para deformarse.

Una característica aparentemente paradójica es que esta dureza excepcional coexiste con una notable flexibilidad macroscópica. Una lámina de grafeno puede curvarse, doblarse y enrollarse sin que su estructura cristalina se rompa, siempre que las deformaciones no superen ciertos umbrales. Esta combinación de resistencia y flexibilidad ha motivado el interés en aplicaciones de electrónica flexible: dispositivos que se doblan con el cuerpo, pantallas enrollables y sensores conformables que se adhieren a superficies curvas.

La resistencia a la fractura también es notable. Mediciones de nanoindentación realizadas con microscopía de fuerza atómica han determinado que una capa de grafeno puede soportar presiones de hasta 130 GPa antes de romperse, lo que lo convierte en el material más resistente medido hasta la fecha. Para poner esta cifra en perspectiva, el acero de alta calidad comienza a deformarse irreversiblemente a presiones unas 200 veces menores.

3.3 Conductividad térmica

La conductividad térmica del grafeno, medida dentro del plano de la lámina, puede alcanzar valores de entre 3000 y 5000 W/(m•K) a temperatura ambiente, superando a cualquier otro material conocido, incluido el diamante (aproximadamente 2000 W/(m•K)) y el cobre (400 W/(m•K)). Este transporte de calor excepcionalmente eficiente se debe fundamentalmente a la propagación de fonones acústicos a lo largo de la red hexagonal perfectamente regular, con muy poca dispersión en muestras sin defectos.

Desde el punto de vista aplicado, esta propiedad convierte al grafeno en un candidato ideal para la gestión del calor en dispositivos electrónicos miniaturizados. El sobrecalentamiento es uno de los principales factores limitantes en la miniaturización de chips y procesadores; la integración de capas de grafeno como disipadores térmicos podría extender los límites actuales de densidad de integración.

3.4 Transparencia óptica y conductividad simultánea

Una lámina de grafeno absorbe exactamente un 2.3 % de la luz visible incidente, un valor sorprendentemente preciso que resulta de un cálculo teórico directo a partir de la constante de estructura fina $\alpha \approx 1/137$, una de las constantes fundamentales de la física (Nair et al., 2008):

$$A = \pi\alpha \approx 2.3\ \% \tag{3}$$

Esto significa que el grafeno es prácticamente transparente: con una sola capa atómica se absorbe apenas una fracción minúscula de la luz, lo que lo hace visible a simple vista sobre sustratos adecuados solo gracias a la interferencia óptica. Más significativo aún es que esta transparencia coexiste con una conductividad eléctrica considerable, una combinación que prácticamente no existe en ningún otro material y que lo convierte en el candidato ideal para electrodos transparentes en pantallas táctiles, células fotovoltaicas y LEDs.

Los materiales actualmente usados como electrodos transparentes, principalmente el óxido de indio-estaño (ITO, por sus siglas en inglés), son frágiles, costosos y fabricados con materiales críticos cuya disponibilidad a largo plazo es incierta. El grafeno, por el contrario, es flexible, relativamente abundante en forma de carbono, y sus propiedades ópticas y eléctricas pueden ajustarse mediante dopaje o funcionalización química.

4. ESTABILIDAD DE UN CRISTAL BIDIMENSIONAL: EL PROBLEMA DE MERMIN-WAGNER

Cuando Geim y Novoselov aislaron el grafeno en 2004, su descubrimiento desafió una convicción teórica bien establecida. En los años 1960, los físicos David Mermin y Herbert Wagner demostraron que un cristal perfectamente bidimensional no puede existir de forma estable a temperatura finita, porque las fluctuaciones térmicas destruirían inevitablemente el orden de largo alcance de la red. El grafeno, sin embargo, existe y es estable. ¿Cómo es posible?

La respuesta reside en que el grafeno real no es perfectamente plano. Observaciones mediante microscopía electrónica y de fuerza atómica han revelado que las láminas de grafeno libre presentan ondulaciones espontáneas de amplitud nanométrica, que fluctúan en la dirección perpendicular al plano. Estas corrugaciones

no son un defecto del material sino un mecanismo de estabilización: al curvar la lámina en la tercera dimensión, el sistema aprovecha los grados de libertad fuera del plano para minimizar la energía libre y resistir las perturbaciones térmicas.

Este fenómeno tiene implicaciones prácticas. Las corrugaciones afectan la movilidad de los portadores de carga —porque crean potenciales locales que dispersan los electrones— y modifican las propiedades mecánicas locales del material. En grafeno depositado sobre un sustrato, las interacciones con la superficie reducen las ondulaciones y pueden cambiar las propiedades electrónicas de manera significativa, lo que hace que el entorno del grafeno sea un parámetro de diseño crítico en las aplicaciones.

5. MÉTODOS DE SÍNTESIS Y PRODUCCIÓN DE GRAFENO

Uno de los desafíos centrales que ha enfrentado la investigación sobre grafeno desde su descubrimiento es la producción del material en cantidades suficientes, con la calidad adecuada y a un costo viable. La forma en que se obtiene el grafeno influye directamente en su estructura, sus defectos, sus propiedades electrónicas y, en consecuencia, en las aplicaciones para las que resulta adecuado. Los métodos de síntesis (Figura 3) se clasifican en dos grandes categorías: los métodos de arriba hacia abajo (*top-down*), que parten de materiales macroscópicos ricos en carbono para separar capas individuales, y los métodos de abajo hacia arriba (*bottom-up*), que construyen la lámina de grafeno átomo a átomo a partir de precursores moleculares.

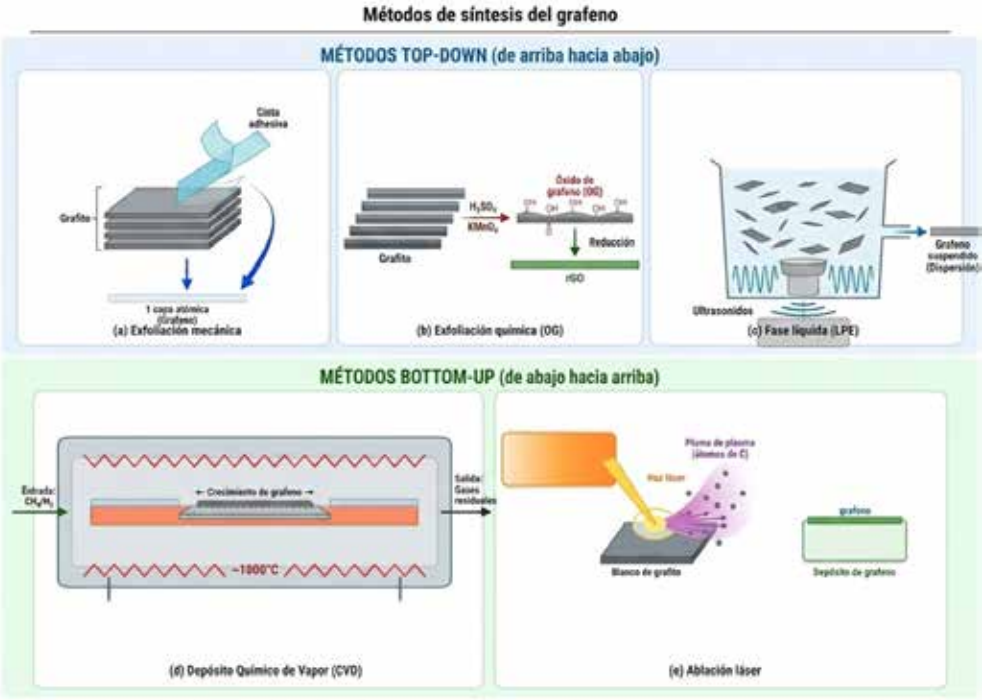


Figura 3. Comparación esquemática de los enfoques *top-down* y *bottom-up* para la síntesis de grafeno. En el panel superior se ilustran los métodos top-down: exfoliación mecánica con cinta adhesiva a partir de grafito, exfoliación química mediante oxidación-reducción, y exfoliación en fase líquida. En el panel inferior se ilustran los métodos bottom-up: depósito químico de vapor (CVD) sobre un sustrato metálico catalizador y ablación láser. Fuente: Elaboración propia con base en Hutapea et al. (2025)

5.1 Métodos top-down

5.1.1 Exfoliación mecánica

La exfoliación mecánica es históricamente el primer método empleado para aislar grafeno y fue precisamente el que utilizaron Geim y Novoselov en sus experimentos originales. El principio es muy simple: se aplica cinta adhesiva sobre la superficie de un cristal de grafito de alta calidad (HOPG, grafito pirolítico altamente orientado) y se despegan sucesivamente capas de material hasta obtener láminas de uno o pocos átomos de grosor, que después se transfieren a un sustrato de SiO^2 para su caracterización (Novoselov et al., 2004).

El proceso explota la anisotropía del grafito: los enlaces covalentes que unen a los átomos dentro de cada capa son aproximadamente 40 veces más fuertes que las fuerzas de van der Waals que mantienen unidas las capas entre sí. La energía de unión intercapas es del orden de 2 eV/nm^2, lo que permite separarlas con fuerzas mecánicas moderadas sin romper la estructura hexagonal interna. El resultado es grafeno de extraordinaria calidad cristalina, con movilidades electrónicas entre las más altas reportadas y prácticamente libre de defectos. Sin embargo, las láminas

producidas son pequeñas —típicamente de decenas a pocas centenas de micrómetros cuadrados— y el proceso es completamente manual, lo que lo hace inviable para producción industrial a gran escala.

5.1.2 Exfoliación química: del óxido de grafeno al grafeno reducido

La exfoliación química del grafito busca superar las limitaciones de escala de la técnica mecánica aprovechando reacciones de oxidación-reducción. El proceso comienza con la oxidación del grafito utilizando mezclas de ácidos fuertes y agentes oxidantes, como ácido sulfúrico (H_2SO_4), ácido nítrico (HNO_3) y permanganato de potasio ($KMnO_4$) que aumenta el espaciado intercapas y debilita las fuerzas que las unen hasta el punto en que una simple sonicación en medio acuoso permite exfoliar el material en nanohojas individuales de óxido de grafeno (OG).

Una vez obtenido el OG, éste debe someterse a una etapa de reducción para restituir parcialmente las propiedades eléctricas del grafeno original. Los agentes reductores más utilizados incluyen hidracina (N_2H_4), borohidruro de sodio ($NaBH_4$) y varios métodos de reducción térmica. El producto resultante, óxido de grafeno reducido (rGO), presenta propiedades eléctricas superiores al OG pero inferiores al grafeno exfoliado mecánicamente, debido a que el proceso de oxidación introduce defectos estructurales irreversibles. No obstante, la escala de producción potencial y el bajo costo hacen al rGO atractivo para aplicaciones como materiales compuestos, recubrimientos conductores y dispositivos de almacenamiento electroquímico de energía.

5.1.3 Exfoliación en fase líquida

La exfoliación en fase líquida (LPE, por sus siglas en inglés) consiste en dispersar grafito en un solvente adecuado y aplicar energía mecánica —usualmente mediante sonicación ultrasónica o cizallamiento de alta velocidad— para separar las capas y obtener suspensiones coloidales de grafeno de pocas capas. La clave del proceso es la elección del solvente: este debe tener una tensión superficial y un parámetro de solubilidad compatibles con los del grafeno para minimizar la energía necesaria para mantener las capas separadas y evitar su reaglomeración.

La LPE produce grafeno con una densidad de defectos relativamente baja en comparación con la exfoliación química, es compatible con procesos de fabricación tipo rollo a rollo (roll-to-roll) y resulta adecuada para la producción de tintas conductoras y recubrimientos funcionales. Sus principales limitaciones son el tamaño lateral reducido de las láminas obtenidas y la distribución heterogénea en número de capas.

5.1.4 Desenrollado de nanotubos de carbono

Un método menos convencional pero conceptualmente elegante consiste en desenrollar nanotubos de carbono para obtener nanocintas de grafeno (GNR, graphene nanoribbons). Los nanotubos de carbono pueden visualizarse como láminas de grafeno enrolladas sobre sí mismas; al cortar estos tubos longitudinalmente, se despliegan en cintas planas de grafeno con anchuras bien definidas. El corte puede realizarse mediante oxidación química controlada, exposición a plasma, tratamientos electroquímicos o métodos mecánicos asistidos. La anchura de la nanocinta obtenida puede controlarse eligiendo el diámetro del nanotubo precursor, lo que es especialmente valioso porque las nanocintas delgadas exhiben un gap de energía finito inducido por el confinamiento cuántico lateral, a diferencia del grafeno de anchura infinita.

5.2 Métodos bottom-up

5.2.1 Depósito químico de vapor (CVD)

El depósito químico de vapor (CVD, chemical vapor deposition) se ha consolidado como el método más prometedor para la producción de grafeno de alta calidad a escalas compatibles con aplicaciones industriales. En este proceso (Figura 4), un gas precursor rico en carbono —generalmente metano (CH_4), a veces combinado con hidrógeno (H_2)— se introduce en una cámara de reacción a temperaturas elevadas, típicamente entre 900 °C y 1 100 °C. En estas condiciones, las moléculas del precursor se descomponen catalíticamente sobre la superficie de un sustrato metálico —habitualmente cobre o níquel— liberando átomos de carbono que migran sobre la superficie hasta incorporarse a una red hexagonal creciente.

El cobre es el sustrato catalítico preferido porque su interacción con el carbono es débil y autoterminante: una vez que se forma una monocapa completa de grafeno, el proceso de crecimiento se detiene, lo que facilita la obtención de grafeno predominantemente monocapa sobre grandes áreas. Después del crecimiento, el grafeno debe transferirse del sustrato metálico al sustrato final de interés, generalmente mediante la disolución química del cobre, un paso que puede introducir contaminaciones o roturas en la lámina y que representa uno de los principales retos técnicos del proceso.

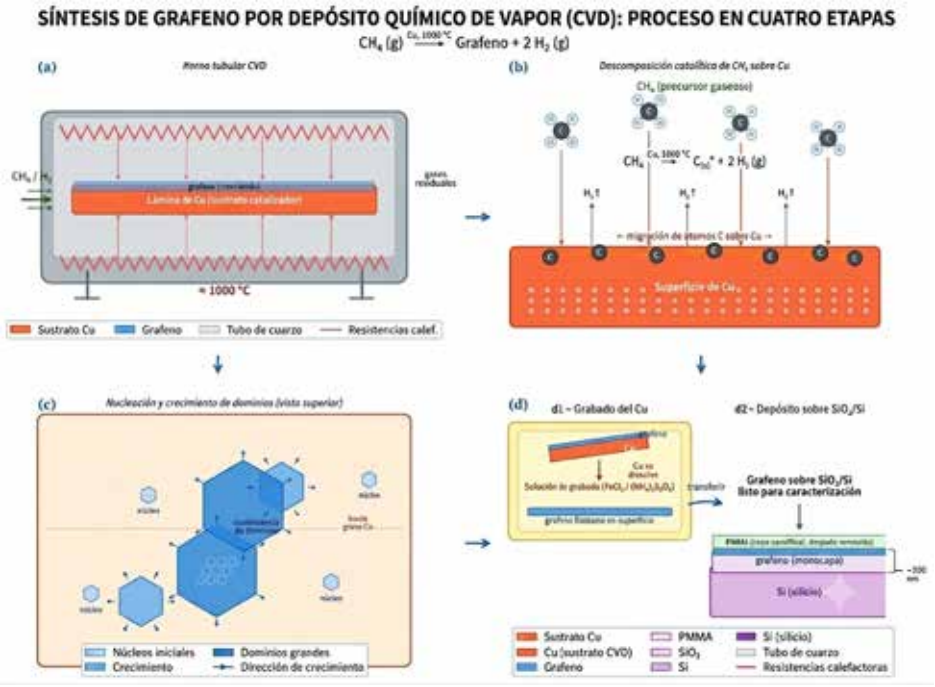


Figura 4. Esquema del proceso de depósito químico de vapor (CVD) para la síntesis de grafeno. Se ilustran las etapas: (a) flujo del gas precursor (CH_4/H_2) sobre el sustrato de cobre a alta temperatura; (b) descomposición catalítica de las moléculas y nucleación de dominios de grafeno; (c) crecimiento y coalescencia de los dominios hasta cubrir el sustrato; (d) transferencia del grafeno al sustrato final mediante disolución del cobre. Fuente: Elaboración propia con base en Bae et al. (2010)

5.2.2 Ablación láser

La ablación láser para la síntesis de grafeno consiste en irradiar un material sólido rico en carbono —típicamente grafito— con pulsos de láser de alta intensidad. La energía aportada por el láser es suficiente para romper los enlaces C-C superficiales, generando una pluma de plasma con átomos y fragmentos de carbono que se depositan sobre un sustrato receptor donde pueden reorganizarse en láminas de grafeno. La calidad del material obtenido depende de factores como la longitud de onda del láser, la duración de los pulsos, la distancia entre el blanco y el sustrato, y la temperatura de este último.

La ablación láser produce grafeno de alta pureza química, sin residuos de solventes ni catalizadores metálicos, lo que la hace atractiva para aplicaciones biomédicas y espectroscópicas. Su principal limitación es la dificultad para obtener láminas de gran área y el elevado costo de los sistemas de láser de alta potencia, que dificultan su escalado industrial.

6. APLICACIONES TECNOLÓGICAS ACTUALES Y EMERGENTES

Las propiedades únicas del grafeno han estimulado una enorme actividad de investigación orientada a su integración en tecnologías de alto impacto. No todas las aplicaciones han alcanzado el mismo nivel de madurez tecnológica: algunas ya están disponibles comercialmente, otras se encuentran en etapas avanzadas de desarrollo, y varias permanecen en el ámbito de la investigación básica. A continuación, se describen las áreas de aplicación más relevantes, organizadas según el estado actual de su desarrollo.

6.1 Electrónica de alta frecuencia

La movilidad electrónica excepcional del grafeno, superior a la del silicio en uno o dos órdenes de magnitud, lo convierte en candidato natural para transistores de efecto campo (FET) que operen a frecuencias de radiofrecuencia y de microondas. IBM y otras empresas tecnológicas han demostrado transistores de grafeno con frecuencias de corte superiores a 100 GHz, muy por encima de los dispositivos de silicio comparables (Lin et al., 2010). Sin embargo, la ausencia de un gap de energía natural en el grafeno impide apagar completamente el dispositivo, lo que limita su uso en lógica digital convencional. Diversas estrategias se han propuesto para abrir un gap controlado: el confinamiento lateral en nanocintas, el dopaje químico y la ingeniería de tensiones mecánicas.

6.2 Sensores

La extrema sensibilidad del grafeno a su entorno químico —incluyendo la posibilidad de detectar la adsorción de moléculas individuales sobre su superficie mediante cambios en la resistividad eléctrica— lo convierte en una plataforma ideal para sensores de alta sensibilidad. Se han demostrado sensores de grafeno para la detección de gases tóxicos como el NO_2 o el NH_3 a nivel de partes por millón o incluso de moléculas individuales. En el ámbito biomédico, electrodos flexibles de grafeno integrados en parches cutáneos permiten monitorizar en tiempo real señales biológicas como la glucosa, el lactato o el potencial cardíaco sin necesidad de extracción de sangre.

Otro avance notable son los implantes neuronales de grafeno: electrodos ultradelgados que, gracias a la biocompatibilidad y la flexibilidad mecánica del material, causan un daño tisular mínimo al implantarse en el cerebro y permiten registrar la actividad eléctrica con resolución espacial y temporal superior a la de los electrodos convencionales. Estas aplicaciones representan uno de los campos de mayor crecimiento en la interfaz entre la nanotecnología y la medicina.

6.3 Almacenamiento de energía

El grafeno y sus derivados han mostrado un potencial significativo para mejorar el rendimiento de las baterías de litio-ion y los supercapacitores. En las baterías, la incorporación de grafeno en los electrodos mejora la conductividad eléctrica, la capacidad de almacenamiento de carga y la velocidad de carga/descarga. En los supercapacitores —dispositivos que almacenan energía en la interfaz electrodo-electrolito y pueden cargarse y descargarse mucho más rápido que las baterías convencionales—, el grafeno proporciona un área superficial específica extraordinariamente alta (hasta 2630 m^2/g en la lámina ideal), lo que maximiza la capacidad de almacenamiento electrostático.

6.4 Electrónica flexible y transparente

La combinación de flexibilidad mecánica, conductividad eléctrica y transparencia óptica posiciona al grafeno como el material del futuro para la fabricación de electrodos transparentes en pantallas táctiles, células solares y diodos emisores de luz orgánicos (OLED). Investigadores de la Universidad de Sungkyunkwan han demostrado ya la fabricación de pantallas táctiles basadas en grafeno CVD de gran área que son comparables al ITO en términos de rendimiento óptico y eléctrico, pero significativamente más flexibles y potencialmente más baratas (Bae et al., 2010). Este es el segmento en el que la comercialización de grafeno es la más avanzada.

6.5 Filtración y purificación de agua

Las membranas de óxido de grafeno presentan permeabilidades al agua y tasas de rechazo de iones ajustables mediante el control del espaciado entre capas y la funcionalización química de su superficie. El OG en láminas tiene la propiedad de permitir el paso de moléculas de agua a una velocidad varios órdenes de magnitud mayor que la esperada para su tamaño, mientras rechaza efectivamente iones y moléculas más grandes. Esta propiedad ha estimulado la investigación de membranas de grafeno para la desalinización del agua del mar y la purificación de agua industrial, con potencial impacto en las crisis de agua dulce que afectan a múltiples regiones del planeta.

6.6 Espintrónica y computación cuántica

Los electrones poseen una propiedad intrínseca denominada espín, análoga a la de una pequeña brújula que puede apuntar hacia arriba o hacia abajo. La espintrónica es la disciplina que busca utilizar el espín, además de la carga eléctrica, como portador de información. El grafeno exhibe un tiempo de coherencia del espín excepcionalmente largo —es decir, el espín mantiene su orientación durante

periodos relativamente prolongados antes de ser perturbado— lo que lo convierte en un candidato para componentes espintrónicos y, a más largo plazo, para elementos de información cuántica. Estos son, en la actualidad, temas de investigación académica, pero con potencial transformador en la electrónica del futuro.

7. EL CICLO DE SOBREEXPECTACIÓN Y LA REALIDAD DEL GRAFENO

El descubrimiento del grafeno desencadenó una ola de entusiasmo en medios de comunicación y en parte de la comunidad científica que, en algunos casos, fue desproporcionada respecto a las posibilidades reales del material en los plazos sugeridos. Se habló de revoluciones inmediatas en electrónica, medicina, energía y materiales de construcción, lo que generó expectativas que el grafeno no pudo cumplir en los plazos que se habían anticipado. Este fenómeno corresponde a lo que Gartner, Inc. describe como el "ciclo de sobreexpectación tecnológica" (*hype cycle*) (Figura 5): una secuencia característica que atraviesan muchas tecnologías emergentes, con una fase inicial de entusiasmo desorbitado, seguida de una caída en el desencanto y una eventual meseta de productividad en la que el valor real de la tecnología se manifiesta de forma sostenida (Gartner, 2023).

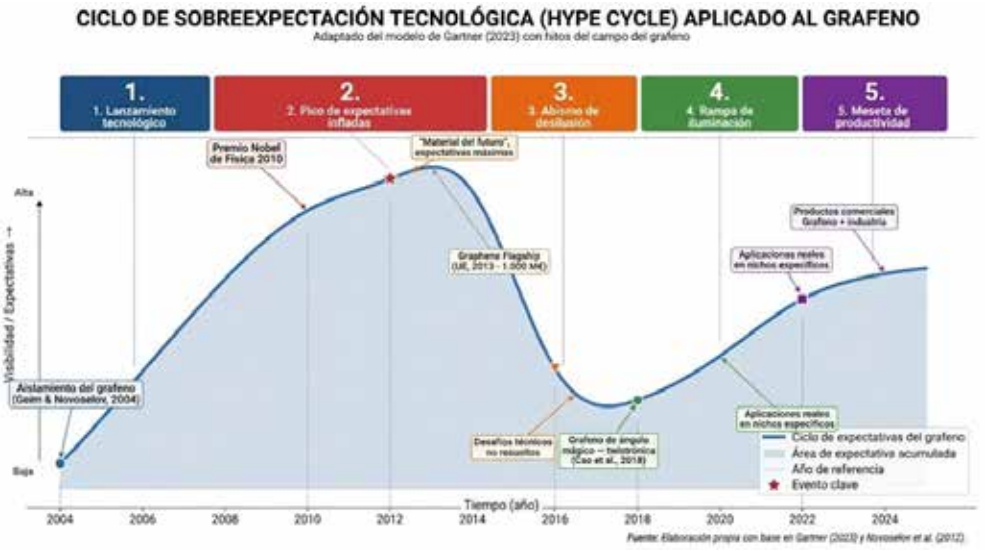


Figura 5. Curva del ciclo de sobreexpectación de Gartner (Hype Cycle) aplicada al grafeno. El eje horizontal representa el tiempo y el eje vertical la visibilidad o expectativas. Se marcan las cinco fases: (1) Lanzamiento tecnológico (2004, aislamiento del grafeno); (2) Pico de expectativas infladas (2010-2014, tras el Premio Nobel); (3) Abismo de desilusión (2015-2018); (4) Rampa de iluminación (2018-2022); (5) Meseta de productividad (2022-presente). Fuente: Elaboración propia con base en Gartner (2023) y Novoselov et al. (2012)

El grafeno alcanzó su pico de sobreexpectación aproximadamente entre 2010 y 2014, coincidiendo con el otorgamiento del Premio Nobel y una avalancha de publicaciones científicas y anuncios de empresas que afirmaban tener aplicaciones comerciales inminentes. La desilusión llegó cuando quedó claro que los desafíos

técnicos para integrar el grafeno en dispositivos reales —la apertura de un gap de energía, la producción masiva de material de alta calidad, la compatibilidad con los procesos de fabricación existentes y la transferencia confiable de láminas CVD— eran más difíciles de resolver de lo previsto.

En la actualidad, el grafeno se encuentra en lo que Gartner denomina la "rampa de iluminación" o incluso en los primeros estadios de la "meseta de productividad": los avances son más modestos pero sólidos y crecientes. Productos comerciales que incorporan grafeno ya existen en el mercado —recubrimientos anticorrosión para estructuras marinas, aditivos en pinturas industriales, baterías con mejores tasas de carga, electrodos en equipos de tenis y ciclismo de alta gama—, y las aplicaciones en electrónica flexible y sensores biomédicos avanzan hacia la comercialización. El grafeno no "sustituyó al silicio" ni "cambió el mundo" en una década, pero sí ha comenzado a transformar silenciosamente nichos específicos y a habilitar tecnologías que sin él serían imposibles.

Esta evolución es coherente con la historia de otros materiales revolucionarios: el silicio mismo tardó décadas desde su descubrimiento científico hasta su masificación en la electrónica de consumo, y los plásticos sintéticos, descubiertos a principios del siglo XX, no dominaron la industria de empaques hasta los años 1950 y 1960. La ciencia de materiales opera en escalas de tiempo largas, y el verdadero impacto del grafeno aún está, en buena medida, por escribirse.

8. PERSPECTIVAS Y DESAFÍOS FUTUROS

El futuro del grafeno como material tecnológicamente relevante pasa por resolver una serie de desafíos que actualmente limitan su adopción masiva. En el plano de la producción, el reto central es obtener material de alta calidad electrónica en grandes cantidades y a costos competitivos. El CVD ha demostrado ser el método más prometedor para esto, pero los procesos de transferencia del metal sustrato al soporte final siguen siendo un cuello de botella. Métodos alternativos de transferencia libre de grabado químico —como el despegado mecánico directo o el uso de polímeros sacrificiales— están siendo activamente investigados.

En el plano de la ingeniería de dispositivos, el problema del gap de energía sigue siendo central para la electrónica lógica. La ingeniería de estrés mecánico —la deformación controlada de la lámina de grafeno para modificar su estructura de bandas— es una de las estrategias más activas en esta dirección, y constituye una de las áreas de investigación en las que algunos de los autores del presente artículo trabaja activamente. Otras estrategias incluyen el desarrollo de heteroestructuras: láminas de grafeno apiladas con otros materiales bidimensionales como el nitruro de boro hexagonal (hBN), el disulfuro de molibdeno (MoS_2) o el fosforeno, formando estructuras tipo van der Waals que combinan propiedades complementarias.

Las heteroestructuras de van der Waals representan, quizás, la frontera más emocionante de la investigación actual en materiales bidimensionales. En 2018, la

observación de superconductividad en grafeno bicapa girado a un ángulo "mágico" de aproximadamente 1.1° —el denominado grafeno de ángulo mágico o magic-angle graphene— abrió un campo completamente nuevo: la twistrónica, que estudia cómo la rotación relativa entre capas de materiales 2D genera propiedades emergentes sin precedente (Cao et al., 2018). Este hallazgo, completamente inesperado, es un recordatorio de que el grafeno y los materiales bidimensionales en general siguen siendo una fuente de sorpresas fundamentales.

A largo plazo, las áreas en las que el grafeno tiene mayores posibilidades de impacto transformador incluyen la filtración y desalinización de agua —donde las membranas de grafeno podrían reducir drásticamente el consumo energético de los procesos de purificación—, la medicina de precisión —con implantes neuronales, biosensores integrados y sistemas de administración controlada de fármacos—, la energía sostenible —con electrodos de mayor capacidad y durabilidad para baterías de próxima generación— y la espintrónica cuántica —donde el grafeno podría ser un componente clave en los procesadores cuánticos del futuro.

CONCLUSIONES

El grafeno no es simplemente un material con propiedades extraordinarias: es un sistema físico que obliga a reconsiderar algunas de las categorías más establecidas de la física del estado sólido y demuestra, de manera contundente, cómo la reducción dimensional puede generar fenómenos emergentes completamente inesperados. En una sola capa atómica convergen la teoría cuántica de campos efectiva, la física del estado sólido clásica, la estabilidad termodinámica no trivial y un potencial tecnológico de amplísimo alcance.

El camino del grafeno desde el laboratorio al mercado ha sido más largo y sinuoso de lo que el entusiasmo inicial suponía, pero no por ello menos prometedor. Las aplicaciones que hoy existen —aunque modestas frente a las expectativas de hace una década— son reales, crecientes y en algunos casos genuinamente transformadoras. La investigación fundamental sobre grafeno y sobre los materiales bidimensionales que su descubrimiento inspiró sigue arrojando hallazgos de primer orden, como lo ilustra el caso del grafeno de ángulo mágico y la superconductividad no convencional.

El grafeno es, en definitiva, mucho más que el "material del futuro" que proclamaron los medios de comunicación en los años posteriores a 2004. Es, sobre todo, una ventana hacia una nueva forma de entender y diseñar la materia: por capas, por ángulos, por defectos controlados, por heteroestructuras ingeniadas átomo a átomo. En ese sentido, su impacto más duradero puede no medirse en toneladas producidas o en dispositivos vendidos, sino en la transformación que ha operado en nuestra manera de concebir los materiales del siglo XXI.

REFERENCIAS

Bae, S., Kim, H., Lee, Y., Xu, X., Park, J. S., Zheng, Y., ... Kim, K. S. (2010). Roll-to-roll production of 30-inch graphene films for transparent electrodes. *Nature Nanotechnology, 5*(8), 574–578. https://doi.org/10.1038/nnano.2010.132

Cao, Y., Fatemi, V., Fang, S., Watanabe, K., Taniguchi, T., Kaxiras, E., & Jarillo-Herrero, P. (2018). Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices. *Nature, 556*(7699), 43–50. https://doi.org/10.1038/nature26160

Castro Neto, A. H., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S., & Geim, A. K. (2009). The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics, 81*(1), 109–162. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.109

Gartner, Inc. (2023). *Gartner hype cycle*. https://www.gartner.com/en/research/methodologies/gartner-hype-cycle

Geim, A. K., & Novoselov, K. S. (2007). The rise of graphene. *Nature Materials, 6*(3), 183–191. https://doi.org/10.1038/nmat1849

Hutapea, J. A. A., Manik, Y. G. O., Ndruru, S. T. C. L., Huang, J., Goei, R., Tok, A. I. Y., & Siburian, R. (2025). Comprehensive review of graphene synthesis techniques: Advancements, challenges, and future directions. *Micro, 5*(3), 40. https://doi.org/10.3390/micro5030040

Katsnelson, M. I. (2012). *Graphene: Carbon in two dimensions*. Cambridge University Press.

Katsnelson, M. I., & Novoselov, K. S. (2007). Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics. *Solid State Communications, 143*(1–2), 3–13. https://doi.org/10.1016/j.ssc.2007.02.043

Katsnelson, M. I., Novoselov, K. S., & Geim, A. K. (2006). Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene. *Nature Physics, 2*(9), 620–625. https://doi.org/10.1038/nphys384

Kittel, C. (2005). *Introduction to solid state physics* (8th ed.). Wiley.

Klein, O. (1929). Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac. *Zeitschrift für Physik, 53*(3–4), 157–165. https://doi.org/10.1007/BF01339716

Lin, Y. M., Dimitrakopoulos, C., Jenkins, K. A., Farmer, D. B., Chiu, H. Y., Grill, A., Avouris, P. (2010). 100-GHz transistors from wafer-scale epitaxial graphene. *Science, 327*(5966), 662. https://doi.org/10.1126/science.1184289

Nair, R. R., Blake, P., Grigorenko, A. N., Novoselov, K. S., Booth, T. J., Stauber, T., Peres, N. M. R., Geim, A. K. (2008). Fine structure constant defines visual transparency of graphene. *Science, 320*(5881), 1308. https://doi.org/10.1126/science.1156965

Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Zhang, Y., Dubonos, S. V., Grigorieva, I.V., Firsov, A. A. (2004). Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science, 306* (5696), 666–669. https://doi.org/10.1126/science.1102896

Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Katsnelson, M. I., Grigorieva, I. V., Dubonos, S. V. , Firsov, A. A. (2005). Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature, 438*(7065), 197–200. https://doi.org/10.1038/nature04233

Novoselov, K. S., Jiang, Z., Zhang, Y., Morozov, S. V., Stormer, H. L., Zeitler, U., Maan, J. C., Boebinger, G. S., Kim, P., Geim, A. K. (2007). Room-temperature quantum Hall effect in graphene. *Science, 315*(5817), 1379. https://doi.org/10.1126/science.1137201

Wallace, P. R. (1947). The band theory of graphite. *Physical Review, 71*(9), 622–634. https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622

Zhang, Y., Tan, Y. W., Stormer, H. L., & Kim, P. (2005). Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene. *Nature, 438*(7065), 201–206. https://doi.org/10.1038/nature04235

AGRADECIMIENTOS

A. R. agradece apoyo a los proyectos FORDECYT-PRONACES/61533/2020 y CIC-UMSNH.

Recepción: **Marzo 18, 2026** | Aceptación: **Julio 31, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

De Wolfram Mathematica a Python: Visualización dinámica del crecimiento poblacional como estrategia de aprendizaje

From Wolfram Mathematica to Python: Dynamic visualization of population growth as a learning strategy

—

María del Sol Muñoz-Mortera[1]
munoz.maria@colpos.mx • ORCID: 0009-0004-8508-7172

Juan Valente Hidalgo-Contreras[1]
jvhidalgo@colpos.mx • ORCID: 0000-0002-4300-7777

Paulino Pérez Rodríguez[2]
perpdgo@colpos.mx • ORCID: 0000-0002-3202-1784

1 Colegio de Postgraduados (COLPOS), Campus Córdoba. Posgrado en Ciencias en Innovación Agroalimentaria Sustentable. Amatlán de los Reyes, Veracruz, México
2 Colegio de Postgraduados (COLPOS), Campus Montecillo. Posgrado en Estadística y Ciencia de Datos. Texcoco, Estado de México

Para citar este artículo:
Muñoz Mortera, M. del S., Hidalgo Contreras, J. V., & Pérez Rodríguez, P. De Wolfram Mathematica a Python: Visualización dinámica del crecimiento poblacional como estrategia de aprendizaje. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a04

RESUMEN

El artículo presenta un análisis comparativo sobre cómo la simulación interactiva ayuda a entender el modelo logístico de crecimiento poblacional. Al enseñar únicamente con fórmulas estáticas, los estudiantes tienen dificultades para comprender conceptos abstractos como la tasa intrínseca de crecimiento y la capacidad de carga. Para resolver esto, la investigación evalúa dos softwares Wolfram Mathematica y Python. Metodológicamente, se implementaron simulaciones interactivas bajo un esquema didáctico de "predicción-observación-explicación", y los resultados se evaluaron en tres dimensiones clave: la curva de aprendizaje requerida, la flexibilidad para personalizar el entorno y la capacidad de la herramienta para fomentar un aprendizaje activo. Por un lado, Wolfram permite construir interfaces gráficas rápidamente, pero opera bajo un paradigma pedagógico de "caja negra" que oculta los procesos computacionales al estudiante y depende de costosas licencias comerciales. Por otro lado, Python, usando herramientas de código abierto como Jupyter Notebook, presenta una curva de aprendizaje inicial más exigente. No obstante, fomenta un aprendizaje activo al obligar a los alumnos a desglosar el modelo, programar las librerías matemáticas y comprender la lógica detrás de la simulación. Los resultados muestran que Python y Wolfram Mathematica ofrecen una flexibilidad, permitiendo integrar narrativas teóricas, código ejecutable y paneles interactivos complejos (como simulaciones multiespecie para observar el colapso poblacional) en un solo lugar. El estudio concluye que la visualización dinámica es mucho más efectiva que los métodos pedagógicos estáticos. Se recomienda la transición hacia Python, ya que no solo facilita la enseñanza de sistemas dinámicos de manera prácticamente gratuita, sino que también impulsa la alfabetización digital y democratiza el conocimiento científico, eliminando barreras económicas en la educación STEM por sus siglas en inglés (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas).

Palabras Clave:

Modelización matemática; crecimiento logístico; software; aprendizaje; didáctica.

— Abstract—

The article presents a comparative analysis of how interactive simulation helps in understanding the logistic model of population growth. When teaching solely with static formulas, students face difficulties in grasping abstract concepts such as intrinsic growth rate and carrying capacity. To address this, the research evaluates two software packages: Wolfram Mathematica and Python. Methodologically, interactive simulations were implemented under a "predict-observe-explain" instructional framework, and the results were assessed across three key dimensions: the required learning curve, the flexibility to customize the environment, and the tool's ability to foster active learning. On one hand, Wolfram allows users to build graphical interfaces quickly, but it operates under a "black box" pedagogical paradigm that hides computational processes from students and relies on expensive commercial licenses. On the other hand, Python, using open-source tools like Jupyter Notebook, presents a steeper initial learning curve. Nonetheless, it promotes active learning by requiring students to break down the model, program mathematical libraries, and understand the logic behind the simulation. The results show that both Python and Wolfram Mathematica offer flexibility, allowing the integration of theoretical narratives, executable code, and complex interactive panels (such as multispecies simulations to observe population collapse) in a single environment. The study concludes that dynamic visualization is far more effective than static pedagogical methods. The transition to Python is recommended, as it not only facilitates the teaching of dynamic systems in a virtually cost-free manner, but also enhances digital literacy and democratizes scientific knowledge by removing economic barriers in STEM (an acronym for science, technology, engineering, and mathematics) education.

Keywords:

Mathematical modeling; Logistic growth; Software; Learning; Didactics.

La evolución del pensamiento en la dinámica de poblaciones ha transitado desde la simplicidad del crecimiento ilimitado hasta el reconocimiento de las restricciones ambientales. Thomas Malthus (1798) estableció el primer principio de la dinámica de poblaciones, postulado que, en ausencia de restricciones, las poblaciones crecen de forma exponencial. Sin embargo, el modelo es poco realista, ya que siempre existen restricciones que limitan el crecimiento, por ejemplo, disponibilidad de espacio, alimento, etc. La ecuación logística ofrece una interpretación más precisa del crecimiento poblacional y constituye una herramienta necesaria en la ecología de poblaciones y la dinámica de poblaciones. A diferencia del crecimiento exponencial maltusiano, que asume recursos ilimitados, el modelo logístico introduce restricciones biológicas realistas mediante la capacidad de carga (K), describiendo cómo las poblaciones se estabilizan al agotar los recursos de su entorno (Ulloa Ibarra & Rodríguez Carrillo, 2010). Este modelo no solo es crucial para entender dinámicas biológicas, sino sirve como una instrucción esencial a las ecuaciones diferenciales no lineales y al comportamiento de sistemas dinámicos complejos (Ulloa Ibarra & Rodríguez Carrillo, 2010).

A pesar de su importancia, los estudiantes a menudo enfrentan dificultades significativas para comprender conceptos abstractos como la tasa intrínseca de crecimiento (r), o la capacidad de carga (K), cuando se presentan únicamente a través de expresiones matemáticas. La falta de visualización inmediata, llevando de la conceptualización compleja a una representación casi física del fenómeno, es lo que impide que el alumno conecte el parámetro matemático con el fenómeno biológico, como la desaceleración del crecimiento o el colapso poblacional (Ulloa Ibarra & Rodríguez Carrillo, 2010). Además, el uso de lenguajes de programación complejos sin una guía visual adecuada puede generar confusión en niveles educativos medios y superiores (Contreras García & Hidalgo Castillo, 2024).

Históricamente, herramientas como Wolfram Mathematica han dominado la enseñanza debido a su potencia para realizar cálculo simbólico, una herramienta excepcionalmente buena que requiere del pago de una licencia para poder usarla. Sin embargo, existe una necesidad imperiosa de transitar hacia herramientas gratuitas de código abierto como Python lo que permite acceso a un mayor número de estudiantes. Esta transición no solo responde a una cuestión económica, sino a la democratización del conocimiento y la alfabetización de datos (Contreras García & Hidalgo Castillo, 2024). Python, es un lenguaje de programación de código abierto con miles de bibliotecas de funciones que permiten realizar tareas complejas en forma transparente para el usuario. El lenguaje puede usarse de forma amigable a través de entornos como Jupyter Notebook, permite una integración fluida de narrativa, código y visualización interactiva, fomentando un aprendizaje activo y reproducible que el software comercial restringe mediante licencias (Contreras García & Hidalgo Castillo, 2024).

La ecuación logística con límites o capacidad de carga (K), sirve como herramienta fundamental para poder predecir el crecimiento poblacional en ecosistemas con

recursos limitados modelando la relación entre el tamaño poblacional y disponibilidad de los recursos. La ecuación incorpora el concepto de capacidad de carga, que define el tamaño máximo de población que un ecosistema puede soportar de manera sostenible en base a los recursos disponibles como alimentos, agua, refugio (Hartvigsen, 2013). A medida que las poblaciones crecen, se acercan a esta capacidad de carga, lo que lleva a una desaceleración en las tasas de crecimiento debido a la limitación de recursos. Las dinámicas poblacionales, que abarcan los cambios en el tamaño de la población a lo largo del tiempo, son captadas efectivamente por el modelo logístico. Este modelo da cuenta de factores como las tasas de natalidad, las tasas de mortalidad y la migración, lo que permite a los investigadores predecir cómo fluctuarán las poblaciones en torno a un equilibrio estable (Gillman, 2005). En la ecuación logística también se integran de manera implícita dentro de los parámetros de la fórmula, factores ambientales, incluyendo el clima y la depredación, que pueden influir aún más en el crecimiento y la estabilidad de la población. Al aplicar este modelo, los científicos pueden evaluar los impactos de diferentes estrategias de manejo sobre la sustentabilidad de la población, informando con ello prácticas de manejo de ecosistemas dirigidas a conservar especies y mantener la salud de los ecosistemas (Breckler, 2006).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Malthus (1798) estableció el modelo de crecimiento de poblaciones de forma exponencial, siendo esta ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

donde N es el tamaño de la población, t es el tiempo y r es la constante de proporcionalidad. Lotka (1925) lo definió como la tasa intrínseca de aumento. Sin embargo, la realidad biológica impone límites. Fisher (1930) denominó a este parámetro r como el "parámetro maltusiano", mientras que Alfred J. Verhulst (1845) introdujo la capacidad de soporte o capacidad de carga (K), integrando un término de frenado ambiental que reconoce la competencia por recursos limitados como espacio y alimento.

La ley de Verhulst (1845), o ecuación logística se expresa como la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

donde K es la capacidad de carga del ambiente y el resto de los términos ya fueron definidos anteriormente. Biológicamente, el término $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ actúa como un "freno" ambiental: a medida que la población se acerca a K, este término tiende a cero, deteniendo el crecimiento. Matemáticamente, esto genera una curva sigmoidea (en

forma de S) donde la velocidad máxima de crecimiento $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ ocurre exactamente cuando la población alcanza $\frac{K}{2}$.

- Si *N* es muy pequeño (pocos individuos), el término es casi 1, y la población crece rápido (como si fuera exponencial).
- Si *N* se acerca a *K* (casa llena), el término se acerca a 0, y el crecimiento se detiene.

En este contexto, la tasa de crecimiento per cápita instantánea se define como $\frac{x'(t)}{x(t)}$, siendo:

- $x'(t)$: Es simplemente otra notación matemática para la derivada $\frac{dx}{dt}$. Representa la velocidad total a la que cambia o crece la población en un momento específico *t*.
- *x(t)*: Es el tamaño total de la población en ese mismo momento *t*.

Mientras que en modelo de Malthus esta tasa es constante, en el modelo de Verhulst depende de la densidad de población, decreciendo linealmente a medida que *N* se aproxima a *K*.

VISUALIZACIÓN DINÁMICA COMO ESTRATEGIA PEDAGÓGICA

La visualización de datos es una habilidad esencial en la educación para la comprensión profunda de variables (Contreras García & Hidalgo Castillo, 2024).

En el ámbito de la investigación, aplicar un modelo determinista sirve como una estrategia fundamental de reduccionismo metodológico. Este enfoque facilita la identificación y análisis de los factores clave de un sistema, lo que ayuda a comprenderlo antes de enfrentarse a la complejidad de sus propiedades emergentes. La capacidad de manipular celdas de código y observar cambios inmediatos en las gráficas fomenta el pensamiento crítico y permite identificar patrones y anomalías que pasarían desapercibidos en un análisis estático.

El objetivo de este artículo es analizar cómo la visualización dinámica de modelos mediante Python y Wolfram Mathematica facilita una comprensión más profunda de la estabilidad del sistema y del comportamiento de las soluciones durante su transición al estado estacionario. Estas herramientas permiten representar de forma rigurosa los fenómenos observados en un entorno controlado.

METODOLOGÍA

Para este estudio comparativo y pedagógico, se desarrollaron simulaciones interactivas del modelo logístico utilizando dos entornos distintos y/o implementaciones

distintas: Wolfram Mathematica y Python. El enfoque técnico se sustenta en las fases de modelización propuestas por Cervantes Gómez (2015):



Figura 1. Enfoque técnico general en la modelización

En la fase de elaboración del modelo, destaca el paso de traducción del fenómeno biológico, ecológico, químico o según sea el caso, donde el investigador traduce el lenguaje del especialista biólogo o ecólogo a variables matemáticas identificables. En este contexto, para este estudio comparativo y pedagógico, se desarrollaron simulaciones interactivas del modelo logístico utilizando dos entornos distintos.

ENTORNO WOLFRAM MATHEMATICA, VERSIÓN 13

En este entorno se aprovecha la capacidad de cálculo simbólico y la facilidad de crear interfaces gráficas rápidas. Mathematica como también se le conoce, destaca por su sintaxis simbólica natural. Se utilizó la función Dsolve o NDSolve para obtener la solución numérica de la ecuación diferencial. La interactividad se logró mediante el comando Manipulate, que permite parametrizar mediante controles deslizantes expresiones matemáticas que dependen de parámetros, como en el caso que nos ocupa *r, K* y N_o. Este enfoque permite al estudiante interactuar con el modelo como una "caja negra", donde el foco está en el resultado visual más que en el algoritmo subyacente que permite resolver la ecuación diferencial. En este entorno la declaración de las variables se realiza de forma directa y cohesiva:

```
(* Declaración de parámetros en Mathematica *)
r = 0.5; K = 100; n0 = 10;
logisticaN[t_]:= K /(1 + ((K - n0)/n0)*Exp[-r*t]);
```

Figura 2. Ejemplo de declaración de variables en Wolfram Mathematica

ENTORNO PYTHON, VERSIÓN 3.7

En el ecosistema de código abierto, Python se implementó un script en un entorno Jupyter Notebook/Google Colab, estructurado en bloques funcionales.

1. **Cálculo Numérico**: Se utilizó la librería NumPy para vectorizar la fórmula integrada del modelo logístico $N(t) = \frac{K}{1+((K-N_0)/N_0)e^{-rt}}$ y generar arreglos con información de tiempo en un solo paso.
2. **Visualización**: Se empleó la biblioteca de funciones Matplotlib para graficar tanto la curva de crecimiento poblacional (N vs t) como la parábola de velocidad de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ vs N).
3. **Interactividad**: Se utilizó la biblioteca de funciones ipywidgets (específicamente interact, FloatSlider, IntSlider) para crear controles deslizantes que permiten al usuario modificar la tasa de crecimiento y la capacidad de carga en tiempo real, actualizando los gráficos instantáneamente sin necesidad de re-ejecutar el código manualmente.

En este entorno la declaración de las variables se realiza de la siguiente forma:

```
# Declaración de parámetros en Python
import numpy as np
r = 0.5
K = 100
n0 = 10
# Definición de la función logística integrada
def logistica_N(t, r, K, n0):
    return K / (1 + ((K - n0) / n0) * np.exp(-r * t))
```

Figura 3. Ejemplo de declaración de variables en Python

ENFOQUE PEDAGÓGICO

La aplicación en el aula se diseñó bajo el esquema de "predicción-observación-explicación". El alumno utiliza los controles deslizantes para responder preguntas guía: ¿Qué sucede con la forma de la curva S si aumentamos r? o ¿Cómo afecta la población inicial N_o al tiempo necesario para alcanzar el equilibrio? El script en Python incluye paneles dinámicos que alertan visualmente cuando la población colapsa o cuando los recursos se agotan, conectando el código con conceptos ecológicos reales como el colapso de la población "overshoot".

A continuación, en el Cuadro 1 se muestra una comparativa de las herramientas utilizadas (Wolfram Mathematica y Python), así como sus características.

Cuadro 1
Comparativa de las características de las herramientas de Wolfram Mathematica y Python

Característica	Wolfram Mathematica, V.13	PythonV.3.7 (Jupyter + ipywidgets)
Estructura de Código	Alta cohesión (todo en uno).	Modular (requiere bibliotecas de funciones de terceros).
Facilidad de Implementación	Inmediata (Sintaxis nativa).	Media (Requiere manejo de decoradores).
Sintaxis Interactiva	Manipulate[ ]	@interact / widgets.interactive
Precisión Matemática	Simbólica y Numérica de alta precisión y complejidad.	Numérica robusta (NumPy/SciPy).
Licencias	Propietario / Académico.	Código Abierto (Gratuito).

COMPARATIVA Y EVALUACIÓN DE ENTORNOS PEDAGÓGICOS (WOLFRAM MATHEMATICA VS. PYTHON)

Para efectuar la comparación pedagógica entre los entornos Wolfram Mathematica y Python, se implementó el modelo de crecimiento logístico en ambas plataformas, observando de manera práctica tanto el proceso de construcción como la interacción obtenida. La evaluación se organizó en torno a tres dimensiones principales:

- La curva de aprendizaje requerida para programar el modelo.
- La flexibilidad del software para personalizar el entorno.
- La capacidad de fomentar un aprendizaje activo.

El objetivo de esta evaluación fue determinar qué herramienta facilita de manera más efectiva la "alfabetización" de problemas matemáticos, estadísticos, etc., donde se vuelve complejo llevar lo intangible a la realidad. Es decir, qué entorno permite al estudiante transitar de ser un receptor pasivo de fórmulas a un investigador que puede experimentar, modificar y comprender críticamente el comportamiento de los sistemas dinámicos.

Autores como Contreras e Hidalgo (2024), validan que el uso de cuadernos interactivos (como Jupyter para Python) permite a los estudiantes manipular celdas de código en tiempo real y observar los efectos de manera inmediata, lo cual materializa conceptos abstractos y promueve una comprensión integral profunda. La evaluación y percepción práctica demostró que Wolfram ofrece interfaces interactivas sumamente rápidas mediante comandos de alto nivel como Manipulate, opera pedagógicamente como una forma más ágil y precisa, sin tanto código. En contraste, Python exige al estudiante integrar librerías como NumPy, Matplotlib e ipywidgets, lo que, si bien requiere un uso más guiado inicialmente para evitar confusiones sintácticas, abre el algoritmo matemático, permitiendo una interactividad más profunda. Esta metodología, similar a la empleada con simuladores

de sistemas complejos, respalda el uso pedagógico de lenguajes de código abierto al convertir la computadora en un laboratorio donde el estudiante controla todas las variables biológicas y matemáticas. Posteriormente, se presentan los resultados obtenidos de la modelación de la ecuación en sus diferentes softwares.

RESULTADOS

La visualización dinámica permite a los estudiantes descomponer el modelo en capas analíticas, observando la sensibilidad de los parámetros en tiempo real. Se presenta en el repositorio GitHub para su consulta:

- Script en Wolfram Mathematica y Python está alojado en el siguiente repositorio: https://github.com/MariaDelSolMM13/De-Wolfram-Mathematica-a-Python-Visualizacion-dinamica-del-crecimiento-poblacional.git

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de cada visualización.

1. Curva sigmoidea, variación de tasa de crecimiento

Los hallazgos visuales de *r* (tasa de crecimiento), muestran que al desplazar el control deslizante para *r* se observa que valores bajos (0.2) producen una curva sigmoide suave, mientras que valores altos (1.0) fuerzan una transición agresiva hacia *K*. En otras palabras, en valores altos de r se muestra cómo la población crece exponencialmente al principio y se estabiliza al llegar a la asíntota de *K*. A continuación, en las Figuras 4 y 5, se presenta la visualización de la evaluación de los valores de la tasa de crecimiento ($r \in \{0.2, 0.5, 1.0\}$) de cada uno de los programas utilizados (Wolfram Mathematica y Python).

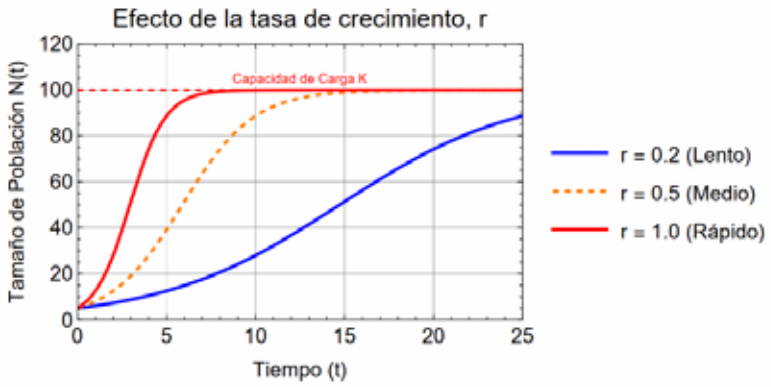


Figura 4. Evaluación de la tasa de crecimiento, con Wolfram Mathematica

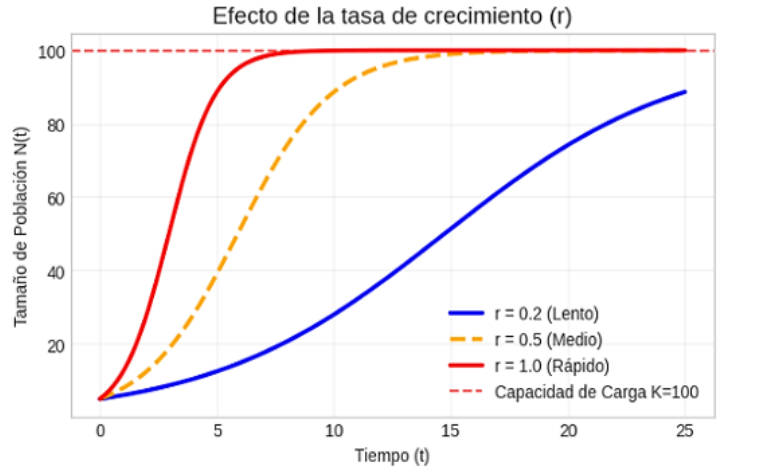


Figura 5. Evaluación de la tasa de crecimiento, con Python

La generación de la curva Sigmoidea en los ambientes como Wolfram Mathematica resulta eficiente y directo gracias al comando Manipulate, este devuelve la función Plot y genera automáticamente los controles deslizantes sin que el usuario deba de programar lógica interna de actualización de la interfaz. Por su parte Python requiere una estructura de código más explícita y fragmentada: exigiendo separar la definición matemática de la función logística, generar vectores numéricos con librerías como NumPy (np.linspace), y configurar los sliders y sus vinculaciones usando ipywidgets. Aunque Wolfram Mathematica parece ofrecer una inmediatez superior para construir el prototipo visual, Python procesa cálculo de manera extremadamente eficiente gracias a los arreglos vectorizados actualizando gráficas fluidas en tiempo real al variar *r* dentro de cuadernos interactivos.

2. Parábola de velocidad, punto de máximo crecimiento $\frac{K}{2}$.

Los hallazgos visuales del punto máximo de crecimiento $\frac{K}{2}$, muestran la velocidad de crecimiento de $\frac{dN}{dt}$ la cuál describe una parábola cuando se grafica frente a *N*. El punto máximo ocurre exactamente en $N = \frac{K}{2}$. Este es el punto de inflexión en la sigmoide, donde la población pasa de una fase de aceleración (predominio del crecimiento exponencial) a una de desaceleración (predominio del freno ambiental). A continuación, en las Figuras 6 y 7, se presenta de manera visual el punto máximo de crecimiento $\frac{K}{2}$. En ambas figuras se observa que cuando la población (*N*) es reducida, la velocidad de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ se acelera rápidamente gracias a la abundancia de espacio y alimento, alcanzando su punto de mayor rapidez exactamente a la mitad de la capacidad del ecosistema $\frac{K}{2}$, correspondiente a 50 individuos). Pasando ese pico, la competencia y la escasez natural provocan que el crecimiento se frene de forma progresiva hasta detenerse por completo al llegar a la capacidad

de carga máxima (N=K) equivalente a 100 individuos, donde si por alguna razón la población supera los 100 individuos, la curva cae a números negativos. Esto indica que habría más muertes que nacimientos debido a la falta de recursos y la población decaería hasta volver al equilibrio en 100.

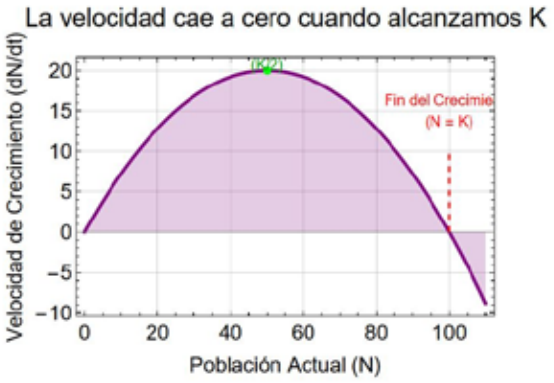


Figura 6. Punto máximo de crecimiento, con Wolfram Mathematica

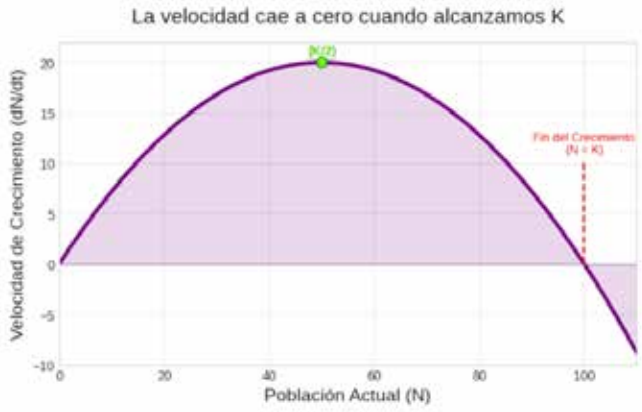


Figura 7. Punto máximo de crecimiento, con Python

Para realizar la gráfica de la tasa de cambio $\frac{dN}{dt}$ vs N y el momento crítico donde la población alcanza la mitad de su capacidad de carga $\frac{K}{2}$, ambos entornos permiten incrustar en las visualizaciones elementos dinámicos, pero difieren en el control sobre capas. Wolfram Mathematica maneja la interactividad del punto mediante el comando Epilog, lo que resulta muy funcional y requiere pocas líneas de código para señalar la posición de la curva. Sin embargo, Python demuestra eficiencia en la personalización visual de Matplotlib. Esta librería permite al estudiante programar capas secuenciales detalladas, como rellenar el área bajo la parábola usando fill_between, o definir colores, marcadores y alertas condicionales según el estado de la población con un nivel de granularidad alta. Esto hace que en Python la gráfica deje de ser un simple dibujo y se convierta en un lienzo adaptable para fines pedagógicos.

3. INTEGRACIÓN DINÁMICA DE PANEL INTERACTIVO, EVALUACIÓN DE CRECIMIENTO POBLACIÓN Y VELOCIDAD

Este panel interactivo permite analizar de forma dinámica los parámetros biológicos como la tasa de crecimiento r, la capacidad máxima de crecimiento K y la población inicial. Así, es posible observar cómo estos parámetros cambian a lo largo del tiempo y evaluar su comportamiento al modificar alguno de ellos, véanse las Figuras 8 y 9.

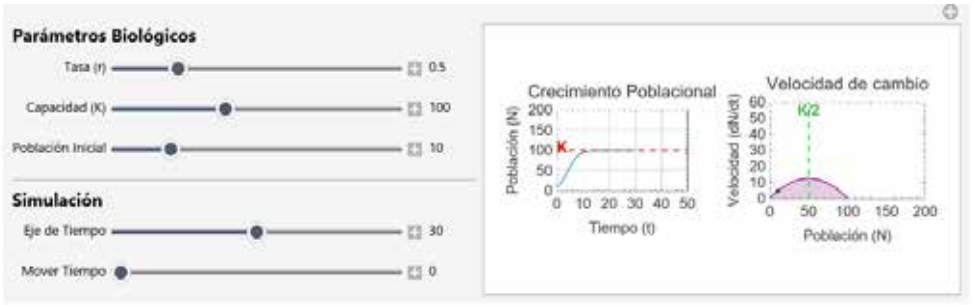


Figura 8. Evaluación de los parámetros biológicos, con Wolfram Mathematica

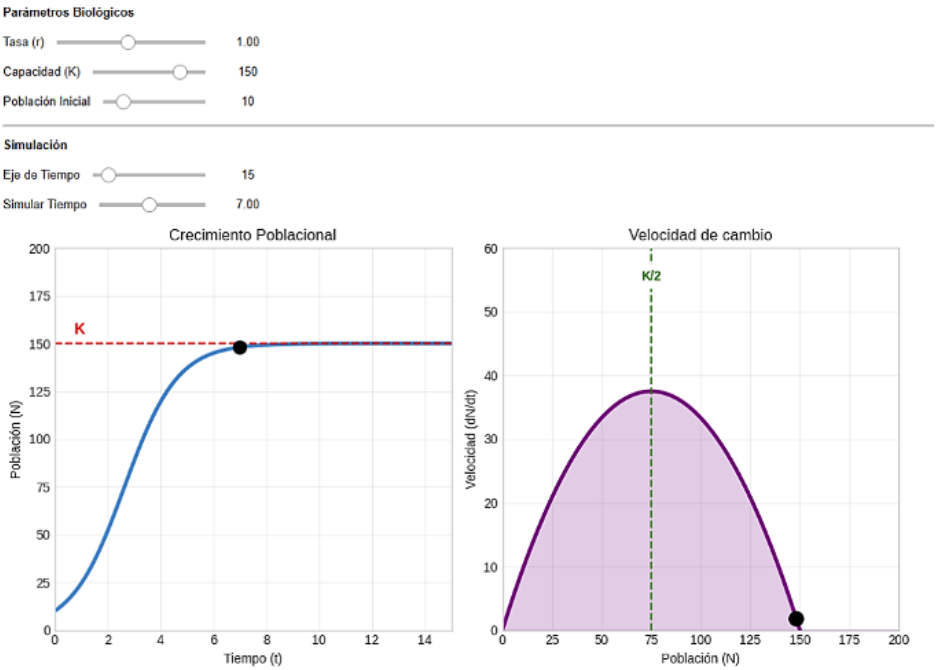


Figura 9. Evaluación de los parámetros biológicos, con Python

Para evaluar la capacidad de integrar múltiples representaciones visuales en un solo panel, por ejemplo, graficar simultáneamente la curva poblacional $N(t)$ y la

parábola de velocidad $\frac{dN}{dt}$, se observan diferencias arquitectónicas clave. En Wolfram Mathematica la creación de un panel unificado es sumamente rápida, ya que se pueden agrupar múltiples gráficos usando comandos como Grid o GraphicsRow dentro del mismo bloque Manipulate. Sin embargo, a medida que se añaden elementos, la interfaz puede volverse rígida. Por otro lado, Python demuestra una eficiencia superior en la modularidad del diseño de interfaces (UI). Utilizando matplotlib.pyplot.subplots (1, 2), Python permite renderizar ambos gráficos lado a lado con un control milimétrico sobre los ejes, colores y sombreado. Además, la combinación de ipywidgets con contenedores como VBox y HBox separa eficientemente la lógica del cálculo matemático de la interfaz gráfica. Desde una perspectiva pedagógica, el enfoque de Python es más robusto, ya que permite al estudiante observar con fluidez web[1] cómo el movimiento de un solo deslizador altera instantáneamente dos dominios matemáticos distintos (el temporal y el de fases), operando como un verdadero tablero de control analítico.

4. PANEL INTERACTIVO SOBRE EL CRECIMIENTO EXCESIVO Y EL COLAPSO DE LA POBLACIÓN (OVERSHOOT)

La evaluación del crecimiento excesivo y el colapso de la población (overshoot), se presenta de manera visual a través de un panel interactivo multiespecie que evalúa tres organismos: bacteria, ballenas y humano, cada uno con sus respectivos parámetros. En estos tres escenarios se desea plasmar la importancia de las variables, a lo largo del tiempo, en este caso para el script se agregó en el panel una alerta visual donde al sobrepasar alguno de los parámetros se mostrará, “recursos limitados”, “sé sobre colapsó”, etc. De esta forma se puede utilizar este último para reflexionar cómo evoluciona la población en diferentes escenarios donde existe una limitación de recursos, de medio ambiente, entre otros. Esto puede servir, para crear interés entre los alumnos, y puedan jugar con los parámetros, y por ejemplo encontrar, en qué escenario, la población llegaría a su punto de equilibrio o donde los decesos son mayores a los nacimientos, o los recursos como el alimento y/o espacio se acabaron, entro otros. En las Figuras 10 y 11, se presenta de manera visual, el panel multiespecie.

1 La **fluidez web** en aplicaciones visuales combina la fluidez en el procesamiento perceptivo y la fluidez en la interfaz digital. Es la facilidad con la que los usuarios interpretan los diseños web y la perfecta capacidad de respuesta de las interfaces gráficas de usuario. Resource

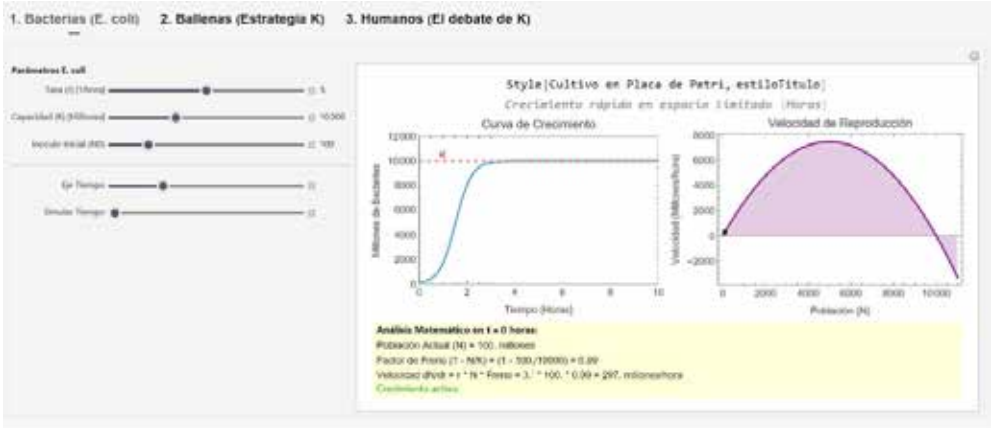


Figura 10. Panel multiespecie (bacterias, ballenas, humanos), en Wolfram Mathematica

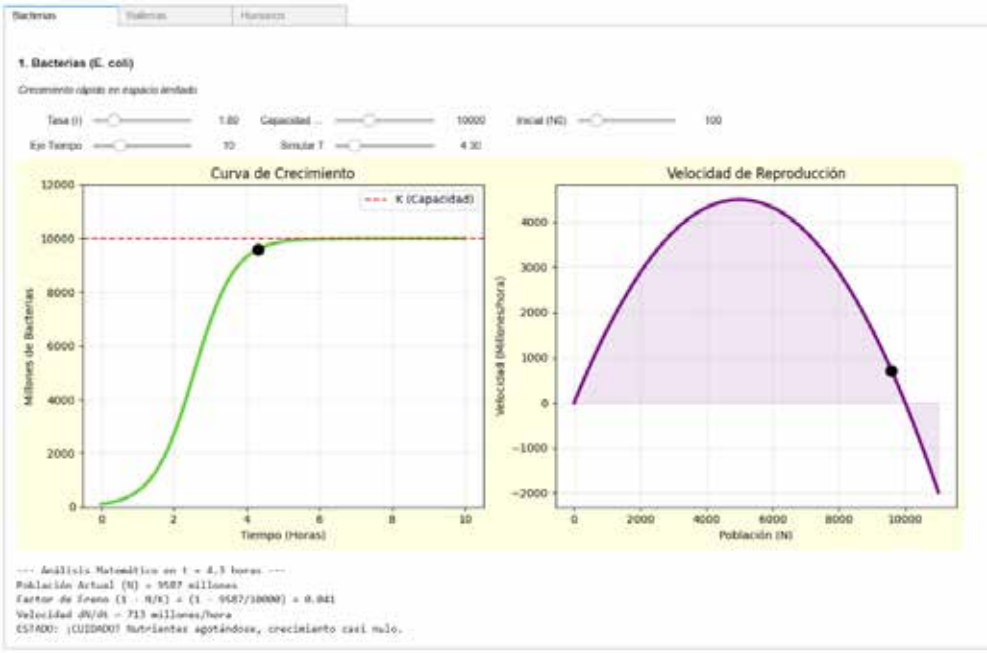


Figura 11. Panel multiespecie (bacterias, ballenas, humanos) en Python

Para simular escenarios complejos y no lineales como el "overshoot" (cuando una población supera su capacidad de carga y agota los recursos), Python presenta una clara ventaja en la construcción de narrativas interactivas. En el entorno de Jupyter/Colab, Python permite el uso de organizadores como TabView, lo que facilita incrustar múltiples escenarios ecológicos (bacterias, ballenas, humanos) en un solo cuaderno sin saturar la pantalla. Python para manejar la lógica condicional integrada con la visualización lo hace a través de sentencias if. Los scripts de Python y Wolfram Mathematica evalúan en tiempo real métricas críticas (como el factor de freno ambiental) y generan alertas textuales dinámicas que cambian de color,

por ejemplo: *"¡CUIDADO! Nutrientes agotándose"* en rojo si el espacio disponible cae bajo un umbral, o "*Escenario Pesimista: Estamos chocando con el límite"* si se simula un colapso poblacional humano. Si bien Wolfram Mathematica puede procesar estas sentencias lógicas internamente, la integración de narrativa, código y alertas condicionales visuales en Python resulta pedagógicamente mucho más inmersiva, aunque el código en Python será mayor al tratar de indicar cada una de las sentencias. En este sentido para el alumno ambas herramientas se transforman en una herramienta más allá de una simple calculadora en un instrumento donde el alumno visualiza en tiempo real las consecuencias del agotamiento de recursos.

RESULTADOS DE LA COMPARATIVA Y EVALUACIÓN DE ENTORNOS PEDAGÓGICOS (WOLFRAM MATHEMATICA VS. PYTHON)

De manera general ambas herramientas son potentes, y casi se puede decir que su uso sería prácticamente por la preferencia del usuario, sin embargo, al comparar la eficiencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, Wolfram Mathematica presenta una barrera mucho menor para lograr simulaciones funcionales. No obstante, opera bajo un paradigma de "caja negra" que oculta los procesos de renderizado y cálculo iterativo. Por el contrario, aunque Python exige a los alumnos una mayor alfabetización inicial en programación (importar librerías, comprender la sintaxis de variables, y diseñar la disposición con elementos como VBox o interactive_output) es pedagógicamente más eficiente a largo plazo. Desglosar el modelo en Python obliga al estudiante a entender cómo las matemáticas se traducen en lógica computacional, logrando una asimilación profunda de los conceptos que trasciende el simple uso pasivo de una interfaz.

En el aspecto de la flexibilidad general, Python supera ampliamente a Wolfram Mathematica, mientras que Mathematica es potente, se encuentra en un ecosistema propietario cerrado; Python es un lenguaje de código abierto, gratuito, altamente versátil y popular. Al utilizar plataformas como Jupyter Notebook o Google Colab, Python permite integrar explicaciones detalladas (incluso en formato LaTeX), código de ejecución y visualizaciones interactivas complejas tipo "dashboard" (como incluir múltiples pestañas para comparar bacterias, ballenas y humanos en un solo bloque). Esta arquitectura abierta y modular confirma que Python es el entorno más eficiente para democratizar el conocimiento analítico, ya que no depende de costosas licencias comerciales para que instituciones y alumnos desarrollen simulaciones de calidad científica.

DISCUSIÓN

Este apartado es una sección de confrontación con las opiniones o hallazgos de otros investigadores, donde nuestros resultados sobre la implementación interactiva del modelo logístico adquieren un contexto analítico más amplio. Por un lado,

nuestra observación respecto a que la programación en Python presenta una curva de aprendizaje inicial más empinada concuerda directamente con Thompson et al. (2020), quienes advierten que el uso de la programación en el aula de matemáticas requiere acompañamiento guiado para que los estudiantes puedan aprovechar la exploración de datos sin frustrarse por la sintaxis. No obstante, una vez superada esta barrera técnica, nuestros resultados validan firmemente la postura de Contreras y Castillo (2024), quienes sostienen que los cuadernos interactivos (Jupyter Notebooks) son herramientas invaluables porque permiten combinar explicaciones teóricas con código ejecutable, promoviendo así un aprendizaje verdaderamente activo frente a la pasividad del software de "caja negra". Esta transición metodológica transforma a la computadora en un "potente laboratorio" virtual que da vida a conceptos abstractos, una idea fuertemente respaldada por Arrieta y Riveros et al.(2013) y Riveros et al. (2011), al concluir que las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) favorecen el desarrollo del pensamiento crítico al permitir al estudiante observar en tiempo real cómo varían las gráficas al modificar parámetros específicos. Finalmente, la efectividad de aplicar estas herramientas al crecimiento poblacional coincide con las conclusiones de Ulloa y Rodríguez (2010), quienes determinan que la simulación computacional interactiva del modelo logístico es indispensable no solo para que el alumno internalice dinámicas no lineales (como la capacidad de carga ambiental), sino para dotarlo de bases sólidas en la toma de decisiones ecológicas y científicas.

RECOMENDACIONES

Para un investigador más experimentado debe de tomar en consideración que el modelo de Verhulst es una simplificación inicial. Y que, para una formación avanzada, se debe introducir, el “Efecto Alle”, donde la tasa de crecimiento intrínseca es máxima a densidades intermedias, modelando la dificultad de encontrar pareja en poblaciones bajas. Así como también la “Ley de Gompertz”, que es utilizada en oncología clínica para tumores donde la tasa de crecimiento decrece logarítmicamente con la masa: $\frac{dx}{dt} = -KxIn(x)$, cada término comparte significado con los términos de la función logarítmica, mencionados en el artículo.

CONCLUSIONES

La visualización dinámica se presenta como una estrategia pedagógica superior a los métodos estáticos. Permite a los estudiantes internalizar conceptos abstractos como la "estabilidad asintótica" observando directamente cómo las curvas convergen a K independientemente de la condición inicial. Por lo que el uso de los scripts en Python y Wolfram Mathematica cumplen con el objetivo de dotar de “vida” a la ecuación de Verhulst (1845), permitiendo al estudiante reflexionar y aprender con mayor facilidad estos fenómenos de la vida real.

Se destaca la importancia de la democratización del software, mientras Wolfram Mathematica es una herramienta potente pero comercial y costosa, Python es gratuito y de código abierto. Introducir Python en el aula no solo enseña matemáticas o biología, si no que alfabetiza digitalmente a los estudiantes en una herramienta estándar en la ciencia, en particular el análisis y visualización de datos. Esto facilita una educación STEM de calidad y acceso igualitario a herramientas avanzadas, eliminando barreras económicas.

REFERENCIAS

Breckler, M. E. (2006). *The Evolving Face of Ecosystem Management* [Honors thesis, The Ohio State University]. http://hdl.handle.net/1811/6009

Cervantes Gómez, L. (Ed.). (2015). *Modelización matemática: Principios y aplicaciones*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Contreras García, J. M., & Hidalgo Castillo, C. (2024). Exploración y visualización de datos en Educación Matemática con Jupyter y Python. *Épsilon – Revista de Educación Matemática, 118*, 81–89.

Elias Arrieta, J. (2013). *Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro.* https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/3012

Fisher, R. A. (1930). *The Genetical Theory of Natural Selection*. Clarendon Press. https://doi.org/10.5962/bhl.title.27468

Gillman, M. P. (2005). Population Dynamics: Introduction. In *Encyclopedia of Life Sciences.* John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1038/npg.els.0003164

Hartvigsen, G. (2013). Carrying Capacity, Concept of. In S. A. Levin (Ed.), *Encyclopedia of Biodiversity* (2nd ed., pp. 695–701). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384719-5.00020-4

Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. Williams & Wilkins.

Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the Principle of Population, as It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers.* J. Johnson.

Riveros, V., Mendoza, M. I., & Castro, R. (2011). Las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de instrucción de la matemática. *Quórum Académico, 8*(15). https://www.produccioncientificaluz.org/index.php/quorum/article/view/29272

Thompson, J., Wu, S. P. W., & Mills, J. (2020, June 22). *The Use of Computer Programming in a Secondary Mathematics Class.* 2020 ASEE Virtual Annual Conference Content Access. https://peer.asee.org/the-use-of-computer-programming-in-a-secondary-mathematics-class

Ulloa Ibarra, J. T., & Rodríguez Carrillo, J. A. (2010). El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. *REDVET. Revista Electrónica de Veterinaria, 11*(3). https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=63613123024

Verhulst, P.-F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale Des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 18*, 1–45.

Recepción: **Marzo 17, 2025** | Aceptación: **Julio 31, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

De las fluctuaciones primordiales a los agujeros negros del universo temprano

From primordial fluctuations to black holes in the early Universe

—

Luis David Jiménez Orozco[1]
luis.jimenezorozco@ucr.ac.cr
ORCID: 0009-0003-6435-641X

Balbina Guadalupe Rodríguez Chávez[2]
rc08058@ues.edu.sv
ORCID: 0000-0002-4639-0433

Luis Enrique Padilla Albores[3]
lepadilla@rikkyo.ac.jp
ORCID: 0000-0002-5681-7699

1 Sección de Física, Universidad de Costa Rica, Alajuela, Costa Rica

2 Escuela de Biología, Universidad de El Salvador,
San Salvador, El Salvador

3 Department of Physics, Rikkyo University, Tokyo, Japan

Para citar este artículo:
Jiménez Orozco, L. D., Rodríguez Chávez, B. G., & Padilla Albores, L. E. De las fluctuaciones primordiales a los agujeros negros del universo temprano. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a05

RESUMEN

El universo actual presenta una gran variedad de estructuras, desde galaxias y cúmulos hasta objetos extremadamente compactos como los agujeros negros. Sin embargo, a gran escala el cosmos es notablemente uniforme. En este artículo se explica, de manera conceptual y accesible, cómo pequeñas fluctuaciones generadas en el universo temprano pueden dar origen a estructuras cósmicas, incluyendo los llamados agujeros negros primordiales. Se describe el marco general de la cosmología estándar, la expansión del universo y el papel del horizonte cosmológico en la evolución de las perturbaciones de densidad. Posteriormente, se introduce la inflación cósmica como el mecanismo responsable de amplificar fluctuaciones cuánticas microscópicas y convertirlas en perturbaciones macroscópicas que actúan como semillas de la estructura cósmica. Finalmente, se analiza el proceso mediante el cual algunas perturbaciones particularmente intensas pueden colapsar gravitacionalmente tras reingresar al horizonte cosmológico, formando agujeros negros primordiales. Estos objetos constituyen una posible ventana hacia la física del universo temprano y podrían estar relacionados con fenómenos actuales como las ondas gravitacionales o incluso con la naturaleza de la materia oscura. El trabajo se presenta desde la Cosmología del Big Bang, inflación y colapso gravitacional, se describe el papel del horizonte cosmológico, el reingreso de perturbaciones y la existencia de un umbral de colapso y no se discuten simulaciones numéricas ni formalismo matemático avanzado.

Palabras clave:

Cosmología; inflación; perturbaciones primordiales; universo temprano; agujeros negros.

— Abstract—

The present-day universe exhibits a wide variety of structures, ranging from galaxies and clusters to extremely compact objects such as black holes. At large scales, however, the cosmos is remarkably uniform. This contrast raises a fundamental question in cosmology: how can such extreme structures arise from a universe that was initially nearly homogeneous?

This article explains, in a conceptual and accessible manner, how small fluctuations generated in the early universe can give rise to cosmic structures, including so-called primordial black holes. The general framework of standard cosmology is described, along with the expansion of the universe and the role of the cosmological horizon in the evolution of density perturbations. Cosmic inflation is then introduced as the mechanism responsible for amplifying microscopic quantum fluctuations and converting them into macroscopic perturbations that act as seeds for cosmic structures. Finally, the process by which certain particularly intense perturbations can gravitationally collapse after re-entering the cosmological horizon, forming primordial black holes, is analyzed. These objects constitute a possible window into the physics of the early universe and could be related to current phenomena such as gravitational waves or even to the nature of dark matter.

Keywords:

Cosmology; inflation; primordial perturbations; early universe; black holes.

1. INTRODUCCIÓN: UN UNIVERSO CASI UNIFORME

Una de las lecciones más profundas de la cosmología contemporánea es que el universo, pese a su complejidad aparente, obedece a principios sorprendentemente simples. A grandes escalas, el cosmos es homogéneo e isotrópico: no hay direcciones privilegiadas ni regiones especiales. Sin embargo, esta uniformidad convive con la presencia de estructuras altamente concentradas, como galaxias, cúmulos y agujeros negros. Comprender cómo emergen tales extremos a partir de condiciones casi uniformes constituye uno de los problemas centrales de la cosmología moderna.

En términos cuantitativos, la homogeneidad e isotropía se manifiestan cuando se estudian escalas mayores o iguales a aproximadamente 100 Mpc (Hogg, 1999). En ese régimen, la distribución promedio de la materia y la expansión cósmica son esencialmente las mismas en todas las direcciones. Este principio, conocido como principio cosmológico, constituye la base del modelo estándar de la cosmología (Dodelson, 2003; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

Sin embargo, a escalas menores aparecen estructuras muy diversas, desde galaxias y cúmulos hasta objetos extremadamente compactos como los agujeros negros. Esto plantea una pregunta central: ¿cómo pueden surgir tales extremos en un universo que, a gran escala, es casi uniforme?

La sorpresa radica en que estos objetos implican enormes concentraciones de materia en regiones muy pequeñas del espacio. Para que se formen tales estructuras, debieron existir pequeñas variaciones iniciales en la densidad del universo que, con el tiempo, crecieron bajo la acción de la gravedad. Según el escenario cosmológico actual, estas pequeñas perturbaciones se originaron en una etapa muy temprana conocida como inflación cósmica, un periodo de expansión acelerada que amplificó fluctuaciones microscópicas y las convirtió en las semillas de todas las estructuras cósmicas posteriores (Guth, 1981; Liddle & Lyth, 2000; Linde, 1982).

Durante la inflación, fluctuaciones cuánticas asociadas al campo inflatón fueron estiradas a escalas cosmológicas y posteriormente se convirtieron en perturbaciones clásicas que dejaron su huella en la radiación cósmica de fondo y en la distribución de materia a gran escala (Dodelson, 2003; Mukhanov, 2005).

En este contexto, surge una pregunta fundamental: ¿cómo pueden pequeñas desviaciones iniciales en la densidad del universo —originadas durante la inflación— amplificarse lo suficiente como para dar lugar a objetos tan extremos como los agujeros negros?

En particular, exploraremos la posibilidad de que algunas de estas fluctuaciones primordiales hayan sido lo suficientemente densas como para colapsar gravitacionalmente poco después de reingresar al horizonte cosmológico, formando así agujeros negros primordiales, cuya posible existencia conecta la física del universo temprano con observables cosmológicos actuales.

2. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR Y PERTURBACIONES

2.1. La expansión del universo

El modelo cosmológico estándar describe al universo, a gran escala, como homogéneo e isotrópico (Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). Dentro de este marco, el cosmos no es estático: se encuentra en expansión desde sus etapas más tempranas.

La primera evidencia observacional de esta expansión fue establecida a finales de la década de 1920, cuando Edwin Hubble mostró que la luz proveniente de galaxias distantes presenta un corrimiento al rojo proporcional a su distancia (Hubble, 1929). Esta relación, conocida como ley de Hubble, indica que cuanto más lejana se encuentra una galaxia, mayor es su velocidad de recesión.

Además del corrimiento al rojo, existen otras dos evidencias fundamentales que respaldan la cosmología del Big Bang. Una de ellas es la radiación cósmica de fondo de microondas, una radiación térmica casi uniforme con temperatura cercana a 2.7 K que constituye un remanente del universo temprano (Dodelson, 2003; Penzias & Wilson, 1965). La otra es la abundancia primordial de elementos ligeros, como el hidrógeno y el helio, cuyas proporciones concuerdan con las predicciones de la nucleosíntesis primordial (Alpher et al., 1948; Weinberg, 2008). En conjunto, estas observaciones sostienen la idea de que el universo tuvo un origen caliente y denso, y que desde entonces ha evolucionado dinámicamente.

Una analogía útil para imaginar la expansión cósmica consiste en pensar en un globo con puntos dibujados sobre su superficie que representan galaxias (ver Fig. 1). Al inflarse el globo, todos los puntos se alejan entre sí. Ninguno ocupa una posición privilegiada: desde cualquiera de ellos parecería que los demás se separan. De forma análoga, el universo se expande de manera global, aunque no lo haga dentro de un espacio preexistente, sino a través de la evolución misma del espacio-tiempo (Ryden, 2017; Weinberg, 2008).

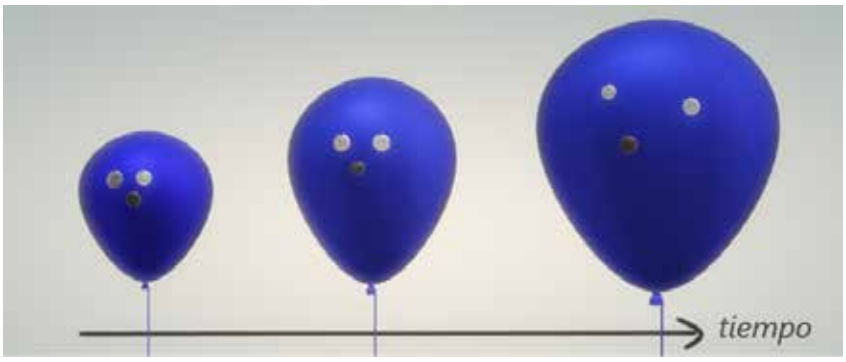


Figura 1. Representación esquemática de la expansión del universo usando como analogía un globo que se infla

2.2. El horizonte cosmológico

Imagina que estás en la playa observando el horizonte. Solo puedes ver la superficie del mar hasta una cierta distancia; más allá de ese límite, el océano se vuelve invisible, oculto por la curvatura de la Tierra. Si deseas ampliar tu campo de visión, puedes subir a un punto más alto, como la cima de un cerro, desde donde es posible observar una región más extensa. Sin embargo, incluso con instrumentos ópticos más potentes, nunca podrás ver más allá del horizonte geométrico, ya que el resto del mar permanece oculto debido a la curvatura terrestre.

Un fenómeno conceptualmente similar ocurre en cosmología, aunque por razones completamente distintas. En el universo no existe un límite visual impuesto por una curvatura local, sino por la naturaleza finita del tiempo y la velocidad de propagación de la luz. Según la teoría de la relatividad, ninguna señal puede viajar más rápido que la luz en el vacío. Dado que el Big Bang ocurrió hace un tiempo finito, existe una distancia máxima desde la cual la luz ha podido alcanzarnos hasta el presente. Este límite se conoce como horizonte de partículas u horizonte cosmológico (Dodelson, 2003; Weinberg, 2008).

Más allá de ese horizonte no hay regiones intrínsecamente inaccesibles por limitaciones tecnológicas, sino regiones cuya luz simplemente no ha tenido tiempo suficiente para llegar hasta nosotros desde el inicio de la expansión cósmica. La porción del espacio contenida dentro de este límite constituye lo que llamamos universo observable (Ryden, 2017).

Si el universo no se estuviera expandiendo, el horizonte cósmico estaría aproximadamente a 13 800 millones de años luz, ya que esa sería la distancia que habría recorrido la luz desde el Big Bang hasta la actualidad. Sin embargo, el universo sí se expande, y esta expansión modifica de manera importante la interpretación de las distancias cosmológicas. Las galaxias que emitieron esa luz se encuentran hoy mucho más lejos que cuando la radiación fue emitida. Al tener en cuenta la expansión cósmica, se estima que el radio actual del universo observable es de aproximadamente 46 500 millones de años luz (Ryden, 2017; Weinberg, 2008).

En escenarios estándar de evolución del universo, como aquellos dominados por radiación o materia, el horizonte de partículas aumenta con el tiempo, ya que la luz dispone de un intervalo cada vez mayor para propagarse. Esto implica que regiones que en un momento dado se encontraban fuera del horizonte pueden, en épocas posteriores, quedar incluidas dentro de él y establecer contacto causal (Mukhanov, 2005).

2.3. Perturbaciones: pequeñas irregularidades

En física clásica, una perturbación se entiende como una pequeña desviación de una magnitud física respecto a una solución de equilibrio o a una configuración de fondo bien definida. Matemáticamente, esto suele formalizarse como la

descomposición de una variable dinámica en un valor de fondo más una corrección pequeña, permitiendo el estudio linealizado del sistema alrededor de dicha solución (Mukhanov, 2005).

En un contexto cosmológico, las perturbaciones se refieren a pequeñas inhomogeneidades en la densidad de energía, la curvatura espacial o el campo inflatón sobre un fondo homogéneo e isótropo (Mukhanov, 2005). Estas pequeñas irregularidades, generadas en el universo temprano, evolucionan bajo la acción de la gravedad.

La gravedad, descrita por la teoría de la relatividad general como la curvatura del espacio-tiempo inducida por la energía y el momento (Einstein, 1915; Misner et al., 1973), desempeña un papel fundamental en la amplificación de dichas perturbaciones. En particular, las fluctuaciones primordiales pueden crecer debido a la inestabilidad gravitacional, proceso que conduce eventualmente a la formación de estructuras cósmicas como galaxias y cúmulos (Peebles, 1980a). Además, en ciertos escenarios del universo temprano, las perturbaciones suficientemente grandes pueden colapsar gravitacionalmente y dar lugar a objetos compactos como los agujeros negros primordiales (B. J. Carr & Hawking, 1974; B. Carr & Kuhnel, 2020).

3. INFLACIÓN Y EL ORIGEN DE LAS PERTURBACIONES

3.1. Aceleración y expansión del universo durante inflación

Para comprender el origen de las estructuras cósmicas —y eventualmente de los agujeros negros primordiales— es necesario remontarnos a una etapa extremadamente temprana del universo: la inflación cósmica (Guth, 1981; Liddle & Lyth, 2000; Linde, 1982).

De manera sencilla, la inflación puede describirse como una fase muy breve de expansión acelerada que ocurrió una fracción diminuta de segundo después del Big Bang. Durante este periodo, el universo no solo se expandía, sino que lo hacía de forma extraordinariamente rápida, aumentando su tamaño en un intervalo de tiempo extremadamente corto.

Esta expansión acelerada tuvo consecuencias profundas. Distancias que inicialmente eran microscópicas fueron "estiradas" hasta alcanzar escalas astronómicas. En cierto sentido, el espacio mismo se expandió de tal manera que regiones que estaban muy próximas entre sí terminaron separadas por distancias enormes.

Sin embargo, hay un aspecto aún más sorprendente. Durante la inflación, el tamaño del horizonte cosmológico —es decir, la distancia máxima a la que las regiones podían influirse causalmente (ver Sec. 2.2)— permanecía aproximadamente constante (Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). Esto contrasta con lo que ocurre en otras etapas de la historia cósmica, donde el horizonte crece con el tiempo.

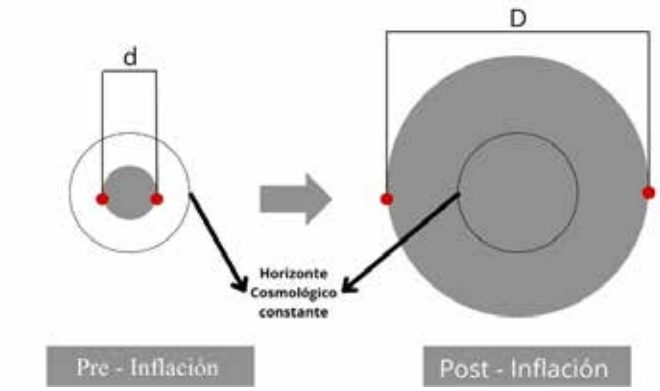
¿Qué significa esto en términos sencillos? Que mientras el universo se expandía de manera explosiva, el "radio de contacto causal" no crecía al mismo ritmo.

Como consecuencia, regiones que inicialmente estaban dentro del horizonte —y por lo tanto podían intercambiar información— fueron estiradas más allá de él. En otras palabras, durante la inflación las distancias crecían más rápido que el propio horizonte.

La Figura 2 ilustra este comportamiento de manera esquemática. Mientras el horizonte se mantiene aproximadamente constante, las distancias "d" y "D" entre puntos aumentan drásticamente. Esto implica que regiones que estaban inicialmente conectadas causalmente pueden quedar fuera de contacto causal efectivo.

Este comportamiento desempeña un papel central en el origen de las perturbaciones primordiales, pues permite que fluctuaciones inicialmente microscópicas sean llevadas a escalas cosmológicas. Más adelante retomaremos este punto con mayor detalle.

En resumen, la característica distintiva de la inflación no es únicamente que el universo se expandiera rápidamente, sino que lo hiciera mientras el horizonte permanecía casi constante. Esta combinación permitió que pequeñas fluctuaciones del universo temprano se transformaran en las semillas macroscópicas de todas las estructuras cósmicas.



Nota. Tal como se observa en la figura, durante la inflación el horizonte cosmológico permaneció aproximadamente constante, mientras las distancias entre los puntos (donde "d" representa el diámetro del universo en etapas pre-inflacionarias y "D" representa dicho diámetro post-inflación) crecían rápidamente.

Figura 2. Esquema ilustrativo del efecto de la expansión inflacionaria sobre dos conjuntos de puntos inicialmente cercanos

3.2. Inflación como solución a problemas cosmológicos

Antes de la propuesta inflacionaria, el modelo estándar del Big Bang enfrentaba algunas dificultades conceptuales importantes. Dos de ellas son conocidas como el problema de la planitud y el problema del horizonte (Guth, 1981; Liddle & Lyth, 2000; Weinberg, 2008).

El problema de la planitud surge del hecho de que las observaciones actuales indican que el universo es casi perfectamente plano a gran escala (Aghanim et al., 2018). Sin embargo, dentro del modelo original del Big Bang, esto requería

que las condiciones iniciales estuvieran ajustadas con una precisión extraordinaria (Dodelson, 2003; Liddle & Lyth, 2000). La inflación ofrece una explicación natural: al expandirse de forma acelerada, cualquier curvatura inicial se diluye rápidamente, haciendo que el universo observable parezca hoy prácticamente plano (Guth, 1981; Liddle & Lyth, 2000; Linde, 1982).

Por otro lado, el problema del horizonte se relaciona con la notable uniformidad térmica observada en el fondo cósmico de microondas (Dodelson, 2003; Penzias & Wilson, 1965). Regiones del cielo muy alejadas entre sí presentan casi la misma temperatura, a pesar de que, según el modelo clásico, no habrían tenido tiempo suficiente para intercambiar información (Weinberg, 2008). La inflación resuelve esta aparente paradoja al proponer que dichas regiones estuvieron originalmente en contacto causal antes de la expansión acelerada (Guth, 1981; Liddle & Lyth, 2000). Posteriormente, fueron separadas más allá del horizonte cosmológico, preservando la homogeneidad inicial.

3.3. El origen de las perturbaciones primordiales

Antes de continuar, es importante señalar algo fundamental. A lo largo de las secciones anteriores hemos mencionado que durante la inflación las escalas se estiran y que pequeñas irregularidades pueden cruzar el horizonte cosmológico. Sin embargo, aún no hemos discutido cómo se originan esas irregularidades en primer lugar. ¿De dónde surgen las perturbaciones que más tarde darán lugar a galaxias, cúmulos e incluso, en casos extremos, agujeros negros primordiales?

En mecánica cuántica existe el concepto de fluctuaciones cuánticas. Incluso en lo que llamamos "vacío", el espacio no está completamente vacío: constantemente surgen pequeñas perturbaciones debido a la naturaleza cuántica de los campos fundamentales (Mukhanov, 2005). En condiciones normales, como en el universo actual, estas fluctuaciones aparecen y desaparecen casi de inmediato, sin llegar a producir efectos macroscópicos.

Sin embargo, la situación era distinta en el universo temprano. Durante la etapa de inflación, el espacio-tiempo se expandía de manera extremadamente acelerada (Guth, 1981; Linde, 1982). Si existían fluctuaciones cuánticas asociadas al campo inflatón —el campo responsable de la inflación—, estas no solo surgían, sino que eran estiradas violentamente por la expansión (Mukhanov, 2005). En lugar de desaparecer rápidamente, eran amplificadas y llevadas a escalas mucho mayores.

A medida que estas fluctuaciones eran estiradas, podían superar el horizonte cosmológico, es decir, la distancia máxima a la que las regiones del universo podían influirse causalmente entre sí. Cuando una fluctuación cruza este horizonte, su evolución queda temporalmente "congelada". Deja de comportarse como una simple fluctuación cuántica microscópica y comienza a comportarse como una perturbación macroscópica clásica.

Más adelante, cuando la expansión del universo se volvió más lenta, estas perturbaciones reingresaron al horizonte cosmológico. En ese momento recuperaron su dinámica causal y comenzaron a evolucionar bajo la acción de la gravedad (Mukhanov, 2005; Peebles, 1980b). La mayoría de ellas dio origen, mucho tiempo después, a galaxias y cúmulos de galaxias.

No obstante, si alguna de estas perturbaciones era lo suficientemente densa, podía colapsar gravitacionalmente poco después de reingresar al horizonte (B. J. Carr & Hawking, 1974; B. Carr & Kuhnel, 2020). Es precisamente en este escenario donde surge la posibilidad de la formación de agujeros negros primordiales.

3.4. Una aclaración importante

Es importante enfatizar un punto fundamental: la inflación no produce agujeros negros primordiales de manera directa. Lo que la inflación genera son fluctuaciones primordiales, que más tarde pueden evolucionar bajo la acción de la gravedad. Solo aquellas perturbaciones cuya amplitud sea suficientemente grande, y que cumplan las condiciones de evolución gravitacional no lineal descritas en la siguiente sección, pueden propiciar la formación de agujeros negros primordiales (B. J. Carr & Hawking, 1974; B. Carr & Kuhnel, 2020).

4. DEL REINGRESO AL COLAPSO: FORMACIÓN DE AGUJEROS NEGROS PRIMORDIALES

En la sección anterior se explicó que, durante la inflación, pequeñas fluctuaciones cuánticas fueron amplificadas y estiradas hasta escalas cosmológicas. Una vez fuera del horizonte, estas perturbaciones permanecieron prácticamente congeladas. Sin embargo, esta situación no es permanente. A medida que el universo continúa expandiéndose después de la inflación, el horizonte cosmológico crece, de modo que perturbaciones que antes estaban fuera de contacto causal eventualmente vuelven a entrar en él.

Este momento, conocido como reingreso al horizonte, es crucial para la formación de estructuras. Mientras una perturbación permanece fuera del horizonte, su evolución dinámica es muy limitada. En cambio, cuando reingresa, vuelve a quedar sometida a la competencia entre gravedad, presión y expansión cósmica. Este equilibrio entre fuerzas determina si la región continuará expandiéndose con el resto del universo o si, por el contrario, colapsará gravitacionalmente (véase Fig. 3). A partir de entonces, su destino dependerá de su amplitud y de las condiciones físicas del universo en esa etapa.



Nota. Si la sobredensidad (Δ) supera un valor crítico (Δ_c), la región puede colapsar y formar un agujero negro primordial.

Figura 3. Representación esquemática de la competencia entre la gravedad y la presión del medio durante el reingreso al horizonte

En la mayoría de los casos, las perturbaciones primordiales que reingresan al horizonte no forman objetos compactos. Su amplitud es demasiado pequeña y terminan contribuyendo, con el paso del tiempo, al crecimiento gradual de la estructura cósmica ordinaria: galaxias, cúmulos y filamentos. No obstante, si una perturbación presenta una sobredensidad suficientemente grande, la gravedad puede vencer tanto a la presión del medio como al efecto diluyente de la expansión del universo. Cuando esto ocurre, la región colapsa gravitacionalmente y puede dar origen a un agujero negro primordial (B. J. Carr & Hawking, 1974; B. Carr & Kuhnel, 2020).

En otras palabras, la formación de un agujero negro primordial no depende únicamente de que exista una fluctuación primordial, sino de que esa fluctuación alcance la amplitud necesaria en el momento adecuado. Esto convierte el reingreso al horizonte en una etapa decisiva: es allí donde se determina si una perturbación seguirá una evolución ordinaria o si, por el contrario, colapsará para formar un objeto extremadamente compacto.

4.1. El umbral de colapso

La posibilidad de que una perturbación forme un agujero negro primordial está asociada a la existencia de un umbral de colapso. De manera general, este umbral representa la amplitud mínima que debe tener una sobredensidad al momento de reingresar al horizonte para que la gravedad pueda dominar sobre los efectos que tienden a impedir el colapso (B. J. Carr, 1975; B. Carr & Kuhnel, 2020; Escrivà et al., 2022).

Para describir esta idea, suele introducirse la sobredensidad fraccional

$$\Delta \equiv \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}},$$

donde ρ representa la densidad local de energía y $\bar{\rho}$ la densidad promedio del universo. En términos sencillos, Δ mide cuánto más densa es una región con respecto al fondo cosmológico que la rodea. Si la sobredensidad es demasiado pequeña, la perturbación no colapsa: la presión y la expansión del universo son suficientes para dispersarla o reincorporarla a la evolución cosmológica ordinaria. Si, por el contrario, la sobredensidad supera cierto valor crítico, el colapso gravitacional se vuelve posible.

De forma esquemática, la condición de formación puede expresarse como

$$\Delta > \Delta_c, \tag{1}$$

donde Δ_c es el valor crítico o umbral de colapso. Su valor exacto no es universal, ya que depende del contenido del universo en el momento del colapso y también del perfil espacial de la perturbación (Escrivà et al., 2022; Musco et al., 2005). En la época dominada por radiación, los estudios numéricos muestran que este umbral suele ser del orden de $\Delta_c \sim 0.4\text{-}0.6$, aunque el valor preciso puede variar según el escenario considerado (Escrivà et al., 2022; Musco et al., 2005).

Esta condición permite entender por qué la formación de agujeros negros primordiales es un fenómeno excepcional. No basta con que existan fluctuaciones primordiales: estas deben ser significativamente mayores que las perturbaciones responsables de la formación ordinaria de estructuras. Mientras las inhomogeneidades pequeñas contribuyen al desarrollo gradual de galaxias y cúmulos, solo las sobredensidades más extremas pueden colapsar casi de inmediato tras el reingreso al horizonte y dar origen a un agujero negro primordial.

Dicho de manera intuitiva, el umbral de colapso marca la frontera entre dos comportamientos posibles. Por debajo de él, la perturbación no logra desacoplarse de la expansión del universo y termina disipándose o evolucionando como una inhomogeneidad ordinaria. Por encima de él, la gravedad domina y la región puede contraerse hasta formar un objeto compacto. En este sentido, la formación de agujeros negros primordiales puede interpretarse como el resultado más extremo de la evolución no lineal de las perturbaciones generadas en el universo temprano.

5. DIFERENCIA CON AGUJEROS NEGROS ASTROFÍSICOS

Una vez descrito el mecanismo de formación de los agujeros negros primordiales, resulta natural compararlos con los agujeros negros que se originan mediante procesos astrofísicos convencionales. Aunque ambos objetos están descritos por

las mismas soluciones de la relatividad general, existen diferencias importantes relacionadas principalmente con su origen y con las escalas de masa involucradas.

La primera diferencia, y quizá la más evidente, es su origen. Los agujeros negros primordiales se formarían a partir del colapso gravitacional de perturbaciones primordiales de densidad en el universo temprano, cuando algunas sobredensidades superan el umbral crítico de colapso discutido en la sección anterior. Este proceso habría ocurrido mucho antes de la formación de estrellas y galaxias (Vázquez et al., 2021).

En contraste, los agujeros negros astrofísicos se forman a partir de la evolución y muerte de estrellas masivas. En estos escenarios, el colapso gravitacional puede ocurrir de distintas maneras. Por ejemplo, una estrella suficientemente masiva puede colapsar directamente en un agujero negro sin producir una supernova visible, o bien puede producirse una explosión de supernova en la que parte de la envoltura estelar no logra escapar y termina cayendo nuevamente sobre el remanente compacto, dando lugar finalmente a la formación de un agujero negro (Mirabel, 2016).

Una segunda diferencia importante se relaciona con las masas características de estos objetos. Los agujeros negros de origen estelar suelen formarse con masas del orden de unas pocas a decenas de masas solares, típicamente entre ~ 1 y ~ 50 masas solares. En cambio, los agujeros negros primordiales no están restringidos por los procesos de evolución estelar, por lo que en principio podrían formarse con una gama mucho más amplia de masas, determinada principalmente por la escala física de la perturbación que colapsa en el momento de reingresar al horizonte (B. Carr & Kühnel, 2026).

Debido a esta diferencia en los mecanismos de formación, la posible detección de agujeros negros con masas fuera de los rangos típicamente esperados para remanentes estelares ha motivado la discusión sobre un posible origen primordial para algunos de estos objetos. No obstante, la identificación observacional de agujeros negros primordiales sigue siendo un tema abierto de investigación en la cosmología moderna.

6. DISCUSIÓN

El posible hallazgo de agujeros negros primordiales tendría implicaciones importantes para la cosmología moderna. A diferencia de los agujeros negros de origen astrofísico, estos objetos habrían surgido en etapas muy tempranas del universo como consecuencia del colapso de sobredensidades primordiales. Por ello, su estudio no solo resulta relevante para comprender la formación de objetos compactos, sino también para reconstruir aspectos de la física del universo primitivo que difícilmente pueden explorarse por otros medios.

Uno de los principales atractivos de los agujeros negros primordiales es que su existencia estaría directamente vinculada a la amplitud y distribución de las

perturbaciones generadas en el universo temprano. En consecuencia, cualquier restricción observacional sobre su abundancia permite acotar escenarios de inflación y modelos capaces de producir fluctuaciones grandes a escalas pequeñas. En este sentido, los agujeros negros primordiales complementan otras sondas cosmológicas tradicionales, como la radiación cósmica de fondo, que describen principalmente perturbaciones de pequeña amplitud y régimen lineal.

Otro aspecto de gran interés es su posible relación con las ondas gravitacionales. Las detecciones realizadas por LIGO, Virgo y KAGRA han abierto una nueva posibilidad para investigar poblaciones de agujeros negros a través de sus eventos de fusión. A partir de ello, se ha considerado la hipótesis de que al menos una fracción de estos sistemas pudiera tener un origen primordial. Aunque esta posibilidad continúa siendo incierta y sigue en discusión, ha fortalecido el interés por los agujeros negros primordiales como un tema de conexión entre cosmología, relatividad general y astronomía multimensajero (Bianchini, 2017; Eroshenko & Stasenko, 2023).

Además, los agujeros negros primordiales también han sido propuestos como candidatos a materia oscura. Esta idea resulta atractiva porque, al tratarse de objetos compactos no luminosos, satisfacen de manera natural la condición de no interactuar electromagnéticamente de forma apreciable, mientras que su presencia puede manifestarse gravitacionalmente (Bertone et al., 2005). En particular, aquellos con masas suficientemente grandes como para no haberse evaporado por radiación de Hawking hasta la época actual podrían, en principio, sobrevivir como parte del contenido material del universo (B. Carr & Kuhnel, 2022).

Sin embargo, esta posibilidad debe tomarse con cautela. Las restricciones observacionales disponibles limitan fuertemente los intervalos de masa y abundancia en los que los agujeros negros primordiales podrían constituir una fracción significativa de la materia oscura. Por ello, más que considerar resuelto este problema, lo adecuado es entender a los agujeros negros primordiales como una hipótesis físicamente bien motivada cuya viabilidad depende de manera sensible del escenario cosmológico adoptado y de la evidencia observacional futura.

En conjunto, el estudio de los agujeros negros primordiales ocupa un lugar particularmente interesante dentro de la cosmología contemporánea. Su relevancia no radica únicamente en la posibilidad de confirmar la existencia de una nueva población de agujeros negros, sino en que su formación, abundancia y propiedades podrían ofrecer información valiosa sobre la inflación, la evolución no lineal de las perturbaciones y la composición del universo. Así, los agujeros negros primordiales se mantienen como uno de los escenarios más sugestivos para conectar la física del universo temprano con observables actuales.

7. CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo hemos visto que los agujeros negros primordiales constituyen una posibilidad fascinante dentro de la cosmología moderna, porque conectan fenómenos del universo muy temprano con observables que podrían estudiarse en la actualidad. A diferencia de los agujeros negros astrofísicos, estos objetos no se habrían originado a partir del colapso de estrellas, sino del colapso gravitacional de sobredensidades generadas en las primeras etapas de la historia cósmica. Por ello, su estudio permite tender un puente entre la física del universo temprano, la teoría de la inflación y la formación de estructura.

También se discutió que la inflación desempeña un papel central en este escenario. Durante esta etapa de expansión acelerada, pequeñas fluctuaciones cuánticas fueron estiradas hasta escalas cosmológicas y se convirtieron en las semillas de las perturbaciones primordiales. Más tarde, al reingresar al horizonte cosmológico, estas perturbaciones comenzaron a evolucionar bajo la acción de la gravedad, la presión y la expansión del universo. Solo aquellas cuya amplitud superó un umbral crítico pudieron colapsar y formar agujeros negros primordiales, lo que muestra que su producción habría sido un fenómeno excepcional, pero físicamente posible.

En este sentido, los agujeros negros primordiales son relevantes no solo como objetos compactos, sino como una herramienta conceptual para explorar condiciones físicas inaccesibles por otros medios. Su posible existencia podría aportar información sobre la amplitud de las perturbaciones a escalas pequeñas, sobre modelos inflacionarios y sobre la evolución no lineal del universo temprano. Además, su estudio ha cobrado aún mayor interés por su posible relación con la materia oscura y con la producción de ondas gravitacionales, dos de los temas más activos de la investigación actual.

En conclusión, los agujeros negros primordiales representan una de las ideas más sugerentes de la cosmología contemporánea. Aunque su existencia aún no ha sido confirmada, su estudio permite comprender mejor cómo pequeñas irregularidades surgidas en el universo temprano pudieron dar lugar a algunos de los objetos más extremos del cosmos. Así, más que una curiosidad teórica, los agujeros negros primordiales constituyen una ventana hacia la física del universo primigenio.

REFERENCIAS

Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak, S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J. P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., … Zonca, A. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics, 641*, 1–67. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910

Alpher, R. A., Bethe, H., & Gamow, G. (1948). The Origin of Chemical Elements. *Physical Review, 73*(7), 803–804. https://doi.org/10.1103/PHYSREV.73.803

Bertone, G., Hooper, D., & Silk, J. (2005). Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Physics Reports, 405*(5–6), 279–390. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031

Bianchini, S. (2017). *Buchi neri primordiali dalle bolle di vuoto*. Università di Bologna.

Carr, B. J. (1975). The primordial black hole mass spectrum. *Astrophysical Journal, 201*, 1–19. https://doi.org/10.1086/153853

Carr, B. J., & Hawking, S. W. (1974). Black holes in the early Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 168*(2), 399–416. https://doi.org/10.1093/MNRAS/168.2.399

Carr, B., & Kuhnel, F. (2020). Primordial black holes as dark matter: Recent developments. *Annual Review of Nuclear and Particle Science, 70*, 355–394. https://doi.org/10.1146/ANNUREV-NUCL-050520-125911/CITE/REFWORKS

Carr, B., & Kuhnel, F. (2022). Primordial black holes as dark matter candidates. *SciPost Physics Lecture Notes, 48*, 56. https://doi.org/10.21468/SCIPOSTPHYSLECTNOTES.48

Carr, B., & Kühnel, F. (2026). Primordial black holes. *Encyclopedia of Astrophysics*, 254–265. https://doi.org/10.1016/B978-0-443-21439-4.00143-7

Dodelson, S. (2003). Modern Cosmology. *In Modern Cosmology*. Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-219141-1.X5019-0

Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte Der Königlich Preußischen Akademie Der Wissenschaften*, 844–847. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....844E/abstract

Eroshenko, Y., & Stasenko, V. (2023). Gravitational Waves from the Merger of Two Primordial Black Hole Clusters. *Symmetry, 15*(3), 637. https://doi.org/10.3390/sym15030637

Escrivà, A., Kuhnel, F., & Tada, Y. (2022). Primordial Black Holes. *ArXiv*, 261–377. https://doi.org/10.1016/B978-0-32-395636-9.00012-8

Guth, A. H. (1981). Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D, 23*(2), 347. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347

Hogg, D. W. (1999). Distance measures in cosmology. *ArXiv E-Prints*, 1–16. https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9905116

Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *PNAS, 15*(3), 168–173. https://doi.org/10.1073/PNAS.15.3.168

Liddle, A. R., & Lyth, D. H. (2000). Cosmological Inflation and Large-Scale Structure. *Cambridge University Press*, 414. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2000cils.book.....L/abstract

Linde, A. D. (1982). A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B, 108*(6), 389–393. https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)91219-9

Mirabel, I. F. (2016). The Formation of Stellar Black Holes. *ArXiv*, 1–32. https://doi.org/10.48550/ARXIV.1609.08411

Misner, C. W., Thorne Kip S, & Wheeler John A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman and Company. https://physicsgg.me/wp-content/uploads/2023/05/misner_thorne_wheeler_gravitation_freema.pdf

Mukhanov, V. (2005). Physical Foundations of Cosmology. *Cambridge University Press*.

Musco, I., Miller, J. C., & Rezzolla, L. (2005). Computations of primordial black-hole formation. *Classical and Quantum Gravity, 22*(7), 1405. https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/7/013

Peebles, P. J. E. (1980a). The large-scale structure of the universe. In *lssu*. Princeton University Press. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1980lssu.book.....P/abstract

Peebles, P. J. E. (1980b). The large-scale structure of the universe. *Princeton University Press*, 440. https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1980lssu.book.....P/abstract

Penzias, A. A., & Wilson, R. W. (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal, 142*, 419–421. https://doi.org/10.1086/148307

Ryden, B. (2017). Introduction to Cosmology. In *Cambridge University Press* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Vázquez, J. A., Padilla, L. E., & Matos, T. (2021). Inflationary Cosmology: From Theory to Observations. *Revista Mexicana de Fisica E, 17*(1), 73–91. https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.73

Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press.

Recepción: **Marzo 6, 2026** | Aceptación: **Julio 31, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

En el corazón de las estrellas de neutrones: laboratorio cósmico donde la materia alcanza sus límites

At the Heart of Neutron Stars: A Cosmic Laboratory Where Matter Reaches Its Limits

—

Carlos Alberto Camposeco Coutiño[1]
carlos.campcou23@gmail.com
ORCID: 0009-0008-0990-0896

Salvador Zarco Juárez[2]
salvadorzarco22@gmail.com
ORCID: 0009-0006-4279-1172

Saúl Fernando Hernández Ortiz[3]
saul.ortiz@umich.mx
ORCID: 0000-0001-8672-4680

1 Instituto Tecnológico de Especialidades

2 Facultad de Medicina, Universidad Autónoma del Estado de México. Toluca de Lerdo, Estado de México, México.

3 Filiación institucional: Facultad de Ingeniería Eléctrica / Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Departamento de Ciencias Básicas / Universidad Aeronáutica en Querétaro. Querétaro, México.

Para citar este artículo:
Camposeco Coutiño, C. A., Zarco Juárez, S., & Hernández Ortiz, S. F. En el corazón de las estrellas de neutrones: laboratorio cósmico donde la materia alcanza sus límites. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a06

RESUMEN

Las estrellas de neutrones representan algunos de los laboratorios naturales más extremos del universo. Nacidas del colapso de estrellas masivas tras una explosión de supernova, concentran una masa comparable a la del Sol en una esfera de apenas unos kilómetros de radio. En su interior, la materia alcanza densidades tan altas que su comportamiento sigue siendo uno de los grandes enigmas de la física moderna. Comprender cómo se relacionan la presión, la densidad y la gravedad en estas condiciones requiere conocer la ecuación de estado de la materia densa. Hoy, gracias a las observaciones multimensajeras, que combinan ondas gravitacionales y señales electromagnéticas, comenzamos a obtener pistas sobre su estructura interna, abriendo la posibilidad de nuevos estados de la materia en el corazón de estas estrellas.

Palabras clave:

Estrellas de neutrones; ecuación de estado; astronomía multimensajera; ondas gravitacionales; materia superdensa; velocidad del sonido.

— Abstract—

Neutron stars represent some of the most extreme natural laboratories in the universe. Born from the collapse of massive stars after a supernova explosion, they concentrate a mass comparable to that of the Sun within a sphere only a few kilometers in radius. Inside them, matter reaches densities so high that its behavior remains one of the great enigmas of modern physics. Understanding how pressure, density, and gravity interact under these conditions requires determining the equation of state of dense matter. Today, thanks to multimessenger observations, combining gravitational waves and electromagnetic signals, we are beginning to obtain clues about their internal structure, opening the possibility of new states of matter in the hearts of these stars.

Keywords:

Neutron Stars; Equation of State (EOS); multi-messenger astronomy; Gravitational Waves (GW); High dense matter; speed of sound.

Cuando la noche cae y el cielo se despeja, observamos una multitud de pequeños puntos azulados suspendidos en la oscuridad. Los llamamos estrellas. Pero ¿qué historia se esconde detrás de esos puntos aparentemente inmóviles?

En este artículo exploramos cómo la evolución de las estrellas masivas puede conducir a la formación de estrellas de neutrones y por qué estos objetos constituyen laboratorios naturales para estudiar la materia bajo condiciones extremas. En particular, revisaremos de manera accesible cómo la ecuación de estado, el equilibrio gravitacional descrito por las ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) y la velocidad del sonido permiten relacionar las propiedades microscópicas de la materia con observables como la masa, el radio y la deformabilidad de marea. Finalmente, mostraremos cómo las observaciones multimensajeras, especialmente las provenientes de fusiones de estrellas de neutrones, permiten confrontar estas ideas con la naturaleza y explorar la posible existencia de nuevos estados de la materia en su interior.

Para comenzar a entender a las estrellas, conviene mirar a la más cercana: el Sol. En numerosas culturas prehispánicas fue venerado como deidad, símbolo de vida y eternidad. Hoy sabemos que no es un objeto divino, sino una estrella más, gobernada por las mismas leyes físicas que rigen el universo (Kippenhahn, 1986). Nació hace aproximadamente 4.6 mil millones de años a partir del colapso gravitacional de una nube interestelar compuesta principalmente por hidrógeno (Kaiser, 2025). Aunque el Big Bang marcó el inicio de la expansión cósmica, las estrellas no aparecieron inmediatamente: fue necesario que la materia se enfriara, se agrupara y permitiera que la gravedad hiciera su trabajo (Kippenhahn, 1986).

Pero no todas las estrellas son como el Sol. El brillo que percibimos no es uniforme: el color de una estrella revela su temperatura superficial. Las más frías brillan en tonos rojizos; conforme aumenta la temperatura, el color transita por el amarillo y el blanco hasta llegar al azul, característico de las más calientes y masivas. Entonces surge la pregunta inevitable: ¿por qué brillan?

No se trata de explosiones constantes ni de combustión química. El brillo estelar es el resultado de la fusión nuclear: núcleos de hidrógeno se combinan para formar helio, liberando enormes cantidades de energía según la relación $E = mc^2$. Esta reacción equilibra la gravedad durante la mayor parte de la vida de la estrella, etapa conocida como secuencia principal (Kippenhahn, 1986), donde pasan cerca del 90% de su existencia.

El destino de una estrella está determinado casi por completo por su masa. Cuando el hidrógeno central se agota, la gravedad vuelve a imponerse: el núcleo se contrae y se calienta, mientras las capas externas se expanden formando una gigante roja. En estrellas mucho más masivas que el Sol —más de ocho masas solares— la historia continúa de manera dramática: se convierten en supergigantes. En su interior se desarrolla una estructura en capas, semejante a una cebolla. Cada capa fusiona un elemento distinto: hidrógeno, helio, carbono, oxígeno, silicio... hasta llegar al hierro.



Nota. "Vida de una estrella", adaptada de "Estrellas de neutrones", de P. Salas y M. A. Solís, 2006, Revista Mexicana de Física E, 52(1), p. 38.

Figura 1. Evolución estelar

Y aquí aparece un límite fundamental de la física nuclear. Mientras la fusión de elementos más ligeros que el hierro libera energía, fusionar hierro requiere absorberla. El núcleo pierde entonces su fuente de presión térmica estable y la gravedad ya no tiene oposición suficiente. El colapso es inevitable.

Durante esa implosión, los electrones son comprimidos hasta combinarse con los protones mediante interacción débil, formando neutrones. En fracciones de segundo, el núcleo se densifica de manera extrema y la envoltura externa es expulsada violentamente en una supernova. Esa explosión no es solo un final, es una forja cósmica: en las condiciones extremas del estallido se sintetizan elementos más pesados que el hierro, como el oro o el uranio. Los átomos que componen nuestro planeta y nuestro cuerpo son vestigios de antiguas supernovas.

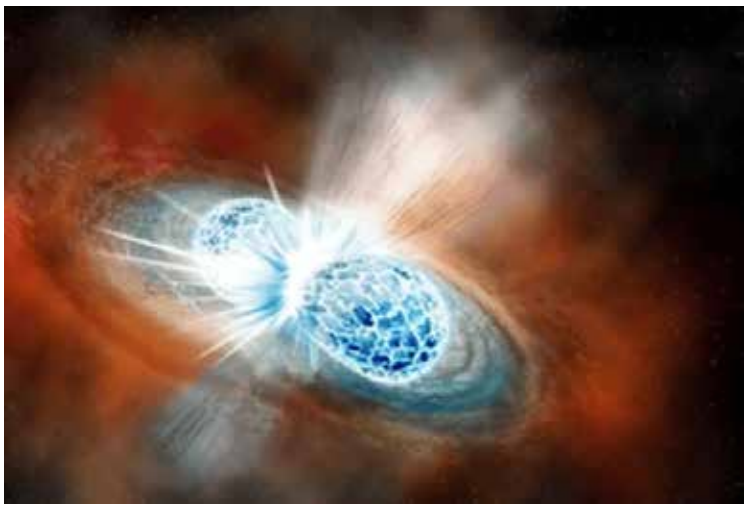
Este recorrido evolutivo, desde la secuencia principal hasta los remanentes compactos, se resume esquemáticamente en la Figura 1. Lo que queda tras la explosión depende nuevamente de la masa del núcleo remanente. Si es suficientemente grande, la gravedad lo comprimirá hasta formar un agujero negro. Si no lo es, el resultado será uno de los objetos más extraordinarios del universo: una estrella de neutrones.



Nota. Adaptado y traducido de "Stars: Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations" (p. 5), por A. Wojnar, 2021, University of Tartu.

Figura 2. Capas de la estrella de neutrones

La existencia de estas estrellas fue teorizada mucho antes de ser observada. La primera evidencia directa llegó en 1967 con la detección de una señal de radio extraordinariamente regular, repetida cada 1.3 segundos, inicialmente denominada "LGM-1", que más tarde se identificaría como el púlsar PSR B1919+21. La sorpresa fue mayúscula: la regularidad del pulso sugería un objeto compacto en rotación extremadamente rápida. Desde entonces, la mayoría de las estrellas de neutrones se han descubierto como púlsares, aunque no todas emiten pulsos detectables desde la Tierra. Con el tiempo, nuevas técnicas ampliaron nuestra capacidad de observación. En 2017, los detectores LIGO y Virgo registraron la fusión de dos estrellas de neutrones en el evento GW170817, observando simultáneamente ondas gravitacionales y radiación electromagnética. Nacía así la astronomía multimensajera, y con ella una nueva etapa para poner a prueba los modelos teóricos que describen la materia en condiciones extremas.



Nota. De “A Primer on Neutron Stars”, Ilustración por Matthew R. Francis, 2019, JSTOR Daily (https://daily.jstor.org/a-primer-on-neutron-stars/). Copyright 2019 de ITHAKA.

Figura 3. Representación artística de la fusión de dos estrellas de neutrones

Estos eventos producen ondas gravitacionales y emisiones electromagnéticas observables simultáneamente, marcando el inicio de la astronomía multimensajera.

Ese nuevo comienzo no solo amplió nuestras capacidades de observación; también permitió organizar la información en un marco conceptual más claro. La llamada “matriz multimensajera”, representada en la Figura 4, sintetiza cómo la masa de chirp —el parámetro que se determina con mayor precisión a partir de la señal de ondas gravitacionales— se conecta con las firmas electromagnéticas producidas tras la fusión. Esta masa de chirp, una combinación matemática de las masas individuales del sistema binario, gobierna la evolución de la frecuencia de la señal justo antes del choque y permite estimar la masa total del sistema.

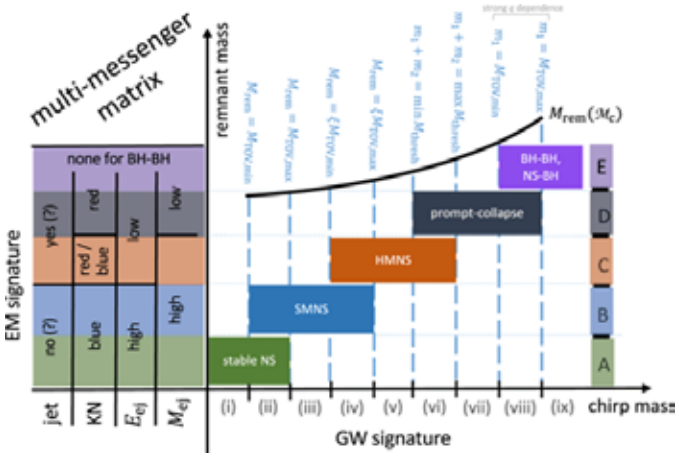


Figura 4. La Matriz Multimensajera

Esquema multimensajero de fusiones binarias de estrellas de neutrones. La masa de chirp (eje horizontal), obtenida a partir de la señal de ondas gravitacionales, determina la masa total del sistema y su comparación con los umbrales críticos de estabilidad. Según estos límites, el remanente puede ser una estrella estable, supramasiva (SMNS), hipermasiva (HMNS) o colapsar de manera inmediata a un agujero negro. Las regiones superiores indican las posibles firmas electromagnéticas asociadas (jet, kilonova azul/roja y masa eyectada), cuya combinación permite restringir la física de la materia a densidades supranucleares. Nota. Tomado de "Figure 2. 'Multi-Messenger Matrix' relating the range of expected EM counterparts of BNS mergers to the GW-measured chirp mass", por B. Margalit y B. D. Metzger, 2019, The Multi-messenger Matrix: The Future of Neutron Star Merger Constraints on the Nuclear Equation of State, p. 3.

Al comparar esa masa total con los umbrales críticos de estabilidad que impone la ecuación de estado, es posible anticipar el destino del remanente. Si la masa final es inferior al límite máximo permitido para una estrella no rotante (M_{TOV}), el resultado será una estrella de neutrones estable, pero si supera ligeramente el límite máximo, puede formar un remanente supermasivo (SMNS), sostenido temporalmente por su rotación uniforme, ahora bien, tomando en cuenta masas aún mayores, aparece un remanente hipermasivo (HMNS), cuya estabilidad depende de una rotación diferencial extrema y cuya vida es necesariamente breve. Finalmente, si la masa excede un valor crítico adicional (M_{thresh}), el sistema experimenta un colapso inmediato hacia un agujero negro en el instante mismo de la colisión.

La transición entre estos regímenes no es arbitraria: depende de la rigidez de la materia, es decir, de cuán eficientemente la presión responde al aumento de la densidad. Y es aquí donde las señales electromagnéticas adquieren un papel decisivo. La presencia o ausencia de un jet relativista, el color de la kilonova —azul o roja según la composición del material eyectado— y la cantidad de masa expulsada al medio interestelar funcionan como indicadores del proceso interno. Al combinar estas observaciones con la masa de chirp inferida de las ondas gravitacionales, es posible imponer límites cada vez más precisos sobre el radio estelar y sobre la densidad máxima alcanzada en el interior, restringiendo así los modelos de materia nuclear en condiciones extremas.

Una estrella de neutrones puede concentrar una masa comparable a la del Sol en una esfera de apenas 20 a 25 kilómetros. Su densidad alcanza valores del orden de 10^{14}–10^{15} g/cm^3, comparable a la densidad nuclear. Su estructura no es uniforme: una corteza externa sólida compuesta por núcleos pesados y electrones; una región interna donde los núcleos comienzan a disolverse en neutrones libres; y un núcleo profundo cuya composición aún es incierta. ¿Existen allí condensados de mesones? ¿Hiperones? ¿Un plasma de quarks desconfinados? ¿O quizá un estado intermedio todavía no completamente comprendido?

En este punto emerge un concepto central: la ecuación de estado, que establece la relación entre la presión y las propiedades termodinámicas de la materia en este

régimen extremo. Para describirla, resulta útil introducir la densidad de energía, (ε), que representa la cantidad de energía contenida por unidad de volumen, y la densidad numérica de partículas, (n). Como referencia, suele emplearse la densidad de saturación nuclear, (n_0), correspondiente aproximadamente a la densidad a la que se encuentran los protones y neutrones dentro de los núcleos atómicos. La ecuación de estado permite entonces determinar cómo responde la presión de la materia al aumentar estas densidades y constituye uno de los elementos fundamentales para comprender la estructura de una estrella de neutrones. Esta relación también determina la familia completa de soluciones de las ecuaciones de TOV, que describen el equilibrio hidrostático relativista entre la presión y la gravedad. En términos sencillos, las ecuaciones TOV permiten determinar cómo varían la presión, la densidad de energía y la masa desde el centro hasta la superficie de una estrella de neutrones, y establecer así qué configuraciones pueden permanecer estables frente a su propia gravedad. En condiciones ordinarias, dicha relación es relativamente sencilla. Pero dentro de una estrella de neutrones intervienen efectos cuánticos, relativistas y las interacciones fuertes entre los constituyentes de la materia nuclear. Si la ecuación de estado es blanda, la presión crece lentamente con la densidad y la estrella será más compacta, con una masa máxima estable menor. Si es rígida, la presión aumenta con mayor rapidez y puede sostener objetos más masivos frente al colapso gravitacional.

Esta diferencia no es meramente descriptiva, refleja qué tan eficientemente la materia resiste la compresión. En términos más fundamentales, esa resistencia está relacionada con la rapidez con la que la presión responde a cambios en la densidad de energía, una propiedad que puede caracterizarse mediante la velocidad del sonido en el medio, (c_s). En términos termodinámicos, su cuadrado está relacionado con la respuesta de la presión ante variaciones en la densidad de energía, $c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon}$.

Por ello, una ecuación de estado más rígida presenta, en general, una respuesta más pronunciada de la presión y un valor mayor de (c_s^2), mientras que una ecuación de estado más blanda presenta una respuesta más débil. Distintos comportamientos posibles de esta cantidad —incluyendo incrementos abruptos o máximos pronunciados en función de la densidad— se ilustran esquemáticamente en la Figura 5. Si la velocidad del sonido cambia abruptamente en un determinado rango de densidades, esto podría indicar algo más profundo que una simple variación cuantitativa: un cambio en los grados de libertad de la materia y, bajo determinadas condiciones, una posible transición de fase en el interior estelar, comparable, de manera muy simplificada, con el cambio de estado del agua de líquido a sólido, pero bajo condiciones de densidad y presión infinitamente más extremas.

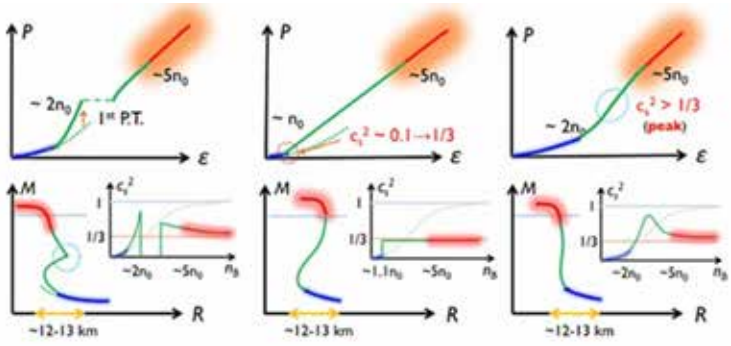


Figura 5. Ecuación de estado y velocidad del sonido

Representación esquemática de distintos comportamientos posibles de la ecuación de estado y de la velocidad del sonido al cuadrado cs2 en función de la densidad. En la parte superior se muestran diferentes relaciones presión–densidad, incluyendo el caso de una transición de fase y escenarios donde la rigidez de la materia aumenta de manera pronunciada. En la parte inferior se ilustran las consecuencias de estos comportamientos en la relación masa–radio de la estrella y en el perfil interno de la velocidad del sonido. Variaciones abruptas o picos en c_s^2 podrían estar asociadas a cambios en los grados de libertad de la materia, como la posible aparición de un régimen quarkiónico en el núcleo estelar. Nota. Tomado de "Fig. 2. Schematic of the squared speed of sound c_s^2 vs. energy density and corresponding M-R relation", por T. Kojo, 2021, QCD equations of state and speed of sound in neutron stars, p. 2.

En ese régimen, la materia podría reorganizar sus grados de libertad. Los neutrones y protones dejarían de ser las únicas entidades relevantes, y los quarks —sus constituyentes fundamentales— podrían adquirir un papel dinámico en la estructura del núcleo. La verdadera incógnita no es solo cuánta masa puede soportar una estrella de neutrones, sino qué tipo de materia permite sostenerla. ¿Está compuesta exclusivamente por neutrones altamente comprimidos? ¿Existen estados exóticos? ¿O la materia atraviesa una transición hacia un régimen quarkiónico intermedio entre la física nuclear efectiva y la cromodinámica cuántica fundamental?

Responder estas preguntas exige algo más que observación astronómica: requiere construir modelos capaces de describir la materia en ese régimen intermedio donde lo hadrónico y lo quarkiónico se entrelazan. Las observaciones recientes de púlsares masivos y de fusiones binarias han comenzado a imponer restricciones cada vez más precisas sobre la ecuación de estado. La Figura 6 ilustra esta tensión entre teoría y observación: distintas ecuaciones de estado propuestas en la literatura predicen relaciones masa–radio que no siempre logran reproducir simultáneamente los radios inferidos y la existencia de púlsares cercanos a dos masas solares. Esta discrepancia sugiere que nuestra descripción microscópica de la materia densa podría estar incompleta. Otra propiedad que permite poner a prueba estas descripciones es la deformabilidad de marea, que mide qué tan fácilmente una estrella de neutrones puede deformarse bajo el intenso campo gravitatorio

de su compañera durante una fusión. Esta deformación depende de la estructura interna de la estrella y, por tanto, de cómo responde la materia a la compresión y de la rigidez efectiva de la ecuación de estado. Su medición a partir de las ondas gravitacionales proporciona así información adicional sobre las propiedades de la materia en el interior estelar.

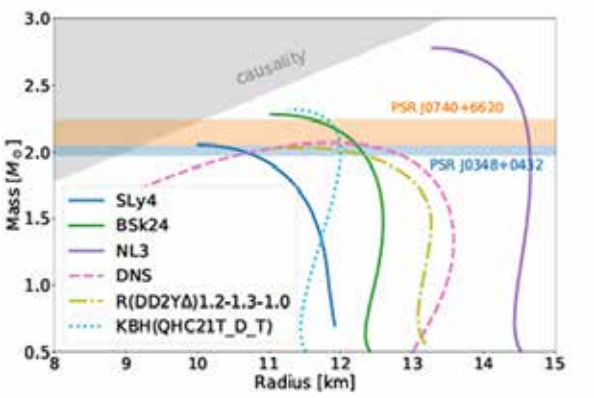


Figura 6. Comparativa de las Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) actuales y mediciones observacionales

Relación masa–radio predicha por diferentes ecuaciones de estado teóricas (curvas) comparada con restricciones observacionales provenientes de púlsares masivos como PSR J0348+0432 y PSR J0740+6620. La región sombreada superior indica el límite impuesto por causalidad. Algunas ecuaciones de estado no logran describir simultáneamente radios compatibles con las observaciones y masas cercanas o superiores a dos masas solares. Esta tensión motiva la exploración de modelos más completos para la materia a densidades extremas, incluyendo la posible aparición de nuevos estados, como un régimen quarkiónico en el núcleo estelar. Nota. Tomado de "Figure 3. Mass-radius relations for a representative sample of equations of state and current constraints from multi-messenger observations", por S. Ascenzi, V. Graber y N. Rea, 2024, Neutron-star Measurements in the Multi-messenger Era, p. 8.

Las estrellas de neutrones ofrecen una oportunidad única para conectar fenómenos astrofísicos observables con las propiedades microscópicas de la materia en condiciones extremas. En este artículo hemos presentado una revisión de los principales elementos que permiten establecer esta conexión, desde la evolución estelar y la formación de estos objetos compactos hasta la ecuación de estado, las ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV), la velocidad del sonido y la deformabilidad de marea. A través de estos conceptos hemos mostrado cómo las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones pueden utilizarse para explorar las características de la materia en su interior y para confrontar diferentes modelos teóricos con las observaciones disponibles. En particular, la posible aparición de nuevos grados de libertad o transiciones

de fase en las regiones más densas constituye uno de los problemas abiertos más interesantes de la física de la materia densa.

Las futuras observaciones multimensajeras serán fundamentales para avanzar en esta dirección. La detección conjunta de ondas gravitacionales y señales electromagnéticas provenientes de nuevas fusiones de estrellas de neutrones permitirá obtener información complementaria sobre sus masas, deformabilidad de marea, dinámica de la colisión y propiedades del material expulsado. La acumulación de estos eventos y su comparación sistemática con modelos teóricos podría imponer restricciones cada vez más precisas sobre la ecuación de estado y proporcionar nuevas pistas sobre posibles transiciones de fase y nuevos estados de la materia en el núcleo estelar. De esta manera, la astronomía multimensajera permitirá no solo conocer mejor las estrellas de neutrones como objetos astrofísicos, sino también establecer restricciones cada vez más precisas sobre las propiedades de la materia en condiciones que no pueden reproducirse en la Tierra.

Así, el universo se convierte en un laboratorio natural. Las estrellas de neutrones no solo representan el desenlace evolutivo de ciertas estrellas masivas; constituyen escenarios donde la materia es llevada al límite de lo conocido. Comprender su estructura interna implica explorar el comportamiento de la interacción fuerte bajo condiciones imposibles de reproducir en la Tierra. Las observaciones actuales sugieren que, en el corazón de una estrella de neutrones, la naturaleza podría estar revelando una fase aún no completamente comprendida. Y al estudiar cómo la presión, la densidad y la velocidad del sonido se entrelazan bajo la acción extrema de la gravedad, no solo buscamos describir un objeto astrofísico: intentamos descifrar cómo la materia reorganiza sus constituyentes más elementales cuando se enfrenta a sus propios límites.

REFERENCIAS

Andronopoulos, E., & Gourgouliatos, K. N. (2026). Equation of state of highly asymmetric neutron-star matter from liquid drop model and meson polytropes. *European Physical Journal A.*

Ascenzi, S., Graber, V., & Rea, N. (2024). Neutron-star measurements in the multi-messenger era. *Astroparticle Physics, 158*, Article 102935. https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2024.102935

Baade, W., & Zwicky, F. (1934). On supernovae. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 20*(5), 254–259. https://doi.org/10.1073/pnas.20.5.254

Bell Burnell, J. (1977). Pulsars and their discovery. *Reviews of Modern Physics, 49*(4), 959–966. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.49.959

Damour, T. (2014). 1974: The discovery of the first binary pulsar. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.3930

Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., & Collins, R. A. (1968). Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature, 217*, 709–713. https://doi.org/10.1038/217709a0

Kaiser, C. (2025, febrero 19). Datos sobre el Sol. *NASA Ciencia*. https://ciencia.nasa.gov/datos-sobre-el-sol/

Kippenhahn, R. (1986). *Cien mil millones de soles: Estructura y evolución de las estrellas.* Editorial Labor.

Kojo, T. (2021). QCD equations of state and speed of sound in neutron stars. *AAPPS Bulletin, 31*, Article 11. https://doi.org/10.1007/s43673-021-00011-6

MacDonald, J. (2017, octubre 19). A primer on neutron stars. *JSTOR Daily*. https://daily.jstor.org/a-primer-on-neutron-stars/

Margalit, B., & Metzger, B. D. (2019). The multi-messenger matrix: The future of neutron star merger constraints on the nuclear equation of state. *The Astrophysical Journal Letters, 880*(1), Article L15. https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab2ae2

Piekarewicz, J. (2018, abril 14). *Neutron skins and neutron stars in the multi-messenger era*. American Physical Society.

Radice, D., Perego, A., Bernuzzi, S., & Zhang, B. (2020). The future of neutron star merger constraints on the nuclear equation of state. *Annual Review of Nuclear and Particle Science, 70*, 95–119. https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-013120-114541

Revista Digital Universitaria. (2018, junio 18). El choque de estrellas de neutrones y la alquimia del Universo. *Revista Digital Universitaria*. https://www.revista.unam.mx/2018v19n3/el-choque-de-estrellas-de-neutrones/

Salas, P., & Solís, M. A. (2006). Estrellas de neutrones. *Revista Mexicana de Física E, 52*(1), 37–46.

Wojnar, A. (2021). Stars: Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations. *Revista Mexicana de Física, 67*(5), 1–10. https://doi.org/10.31349/RevMexFis.67.050701

DOCUMENTOS ACADEMICOS

Recepción: **Junio 10, 2025** | Aceptación: **Marzo 10, 2026** | Publicación: **Junio 1, 2026**

Diplomado en Física Básica 2025, organizado por el Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP)

Physics (MCTP) Diploma in Basic Physics 2025, organized by theMesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP)

—

Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero[1]
lxgutierrez@mctp.mx
ORCID: 0000-0002-7223-1401

1 Coordinadora del Diplomado en Física Básica 2025, Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP)

Para citar este artículo:
Gutiérrez Guerrero, L. X. Diplomado en Física Básica 2025, organizado por el Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP). *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). Recuperado a partir de https://espacioimasd.unach.mx/index.php/Inicio/article/view/536

Los trabajos que integran esta publicación son resultado del Diplomado en Física Básica 2025, organizado por el Mesoamerican Centre for Theoretical Physics (MCTP) como un espacio de formación dirigido a estudiantes interesados en fortalecer sus conocimientos fundamentales de física y acercarse al estudio y comprensión de distintos problemas científicos.

El Diplomado reunió a estudiantes provenientes de diversos países de Centroamérica, América del Sur y el Caribe, conformando una comunidad unida por un interés común: aprender física. A lo largo del programa, los participantes estudiaron y discutieron conceptos fundamentales, desarrollaron herramientas para abordar problemas físicos y tuvieron la oportunidad de interactuar con investigadores de amplia experiencia en distintas áreas de la ciencia.

Aprender física, sin embargo, no consiste únicamente en conocer ecuaciones o resolver ejercicios; implica, también, aprender a formular preguntas, identificar los principios que intervienen en un fenómeno, organizar ideas y comunicar el conocimiento adquirido. Con esta perspectiva, como parte de las actividades del Diplomado se propuso a los estudiantes desarrollar un artículo de carácter académico y de divulgación relacionado con alguno de los temas estudiados durante el programa.

Los artículos reunidos en esta publicación son resultado de ese ejercicio. Su elaboración requirió que los estudiantes profundizaran en un tema, consultaran literatura especializada, discutieran conceptos y organizaran sus ideas hasta convertirlas en un texto destinado, principalmente, a otros jóvenes que comienzan su formación científica. Para muchos de sus autores, esta experiencia representó también uno de sus primeros acercamientos a la escritura académica y a la comunicación de la ciencia.

Este trabajo fue posible gracias a la generosa participación de destacados científicos, quienes aceptaron dirigir y acompañar a los estudiantes durante la elaboración de sus artículos. Además de compartir sus conocimientos y experiencia, dedicaron tiempo a discutir ideas, revisar manuscritos, realizar observaciones y orientar a los jóvenes durante las distintas etapas del proceso. A todos ellos expresamos nuestro más sincero agradecimiento por su tiempo, compromiso, paciencia y generosidad.

La realización del Diplomado y de esta publicación fue también resultado del esfuerzo conjunto de muchas personas. Deseamos reconocer especialmente al personal académico y administrativo del MCTP, cuyo trabajo hizo posible el

desarrollo de las distintas actividades. De manera particular, agradecemos al Ing. Alexis Yuseth Villanueva Manga por su invaluable apoyo en la grabación, organización y publicación de las clases. Su dedicación permitió que los estudiantes, provenientes de distintos países, pudieran disponer de los materiales y consultarlos nuevamente a lo largo de su formación.

Expresamos asimismo nuestro agradecimiento al Dr. Luis Felipe Rodríguez, Director General del MCTP, por su respaldo permanente a las actividades académicas y de formación impulsadas desde el Centro, y al Dr. Ramón Castañeda, Director Adjunto del MCTP, por su apoyo y disposición para hacer posible esta iniciativa. Nuestro reconocimiento se extiende a todas las personas que, desde diferentes funciones, contribuyeron al desarrollo de las clases, seminarios y demás actividades académicas del Diplomado.

Pero, sobre todo, nuestro reconocimiento es para las y los estudiantes del Diplomado en Física Básica 2025, quienes son los verdaderos protagonistas de esta publicación. Su constancia, entusiasmo, curiosidad y disposición para aprender dieron sentido a este proyecto. La elaboración de estos artículos representó un reto adicional: estudiar, investigar, escribir, discutir, corregir y volver a escribir. Los trabajos que se presentan en las páginas siguientes constituyen el resultado de ese esfuerzo y reflejan una parte importante de lo aprendido durante el Diplomado.

Más allá de los conocimientos específicos adquiridos, esperamos que esta experiencia haya permitido a los estudiantes comprender que la ciencia se construye precisamente de esa manera: preguntando, estudiando, discutiendo, equivocándose, corrigiendo y volviendo a intentar. Aprender física significa también desarrollar una manera particular de observar la naturaleza, plantear preguntas y buscar respuestas sustentadas en el razonamiento y la evidencia.

Con la publicación de estos trabajos en *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo*, concluye una etapa iniciada durante el Diplomado, pero esperamos que también comience otra. Nuestro deseo es que estos artículos lleguen a nuevos lectores y puedan servir como material de consulta, motivación y acompañamiento para otros jóvenes que se encuentran dando sus primeros pasos en la ciencia.

Si alguno de estos textos logra despertar una pregunta, estimular la curiosidad o motivar a un estudiante a buscar una explicación y continuar aprendiendo, habrá cumplido una parte fundamental de su propósito. Esperamos que estas páginas sean, finalmente, una invitación a estudiar, preguntar y descubrir, y que acompañen a nuevas generaciones de estudiantes en sus primeros pasos por el maravilloso mundo de la física.

Recepción: **Junio 22, 2024** | Aceptación: **Enero 8, 2026** | Publicación: **Octubre 1, 2026**

El suicidio en México: una aproximación funcional del riesgo

Suicide in Mexico: A functional approach to risk

—

Silvia Paola Cordero León[1]
silvia.corderole@anahuac.mx
ORCID: 0009-0001-7676-3878

Francisco Aguilar Acevedo[1]
facevedo@anahuac.mx
ORCID: 0000-0002-5248-3230

1 Universidad Anáhuac Puebla, San Andrés, Cholula, Puebla México

Para citar este artículo:
Cordero León, S. P., & Aguilar Acevedo, F. (2026). El suicidio en México: una aproximación funcional del riesgo. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo, 15*(45). https://doi.org/10.31644/IMASD.45.2026.a07

RESUMEN

En los últimos años, la cifra de suicidios en México muestra una vertiente ascendente, afectando a grupos en edades que van desde los 10 hasta más de 85 años. Sin embargo, es importante señalar que existen determinados grupos de edad en donde los suicidios se presentan con mayor frecuencia. Así, en este artículo se presenta una descripción cuantitativa de los suicidios ocurridos en México por grupo de edad, haciendo uso de aproximaciones para ajustar una dependencia funcional de las muertes por suicidio respecto a la edad, para el periodo 2017-2022, y con ello, obtener una estimación de la edad de mayor ocurrencia de suicidios que podrían ocurrir en los próximos años. Como parte del estudio, se explora la relación del suicidio con el fenómeno de la COVID-19 ocurrido dentro del intervalo de tiempo analizado. Los resultados muestran un aumento paulatino en la edad de más vulnerabilidad al suicidio, al pasar de 22.37 años en 2017 a 25.19 años en 2022. Las estimaciones proyectadas sugieren un desplazamiento del riesgo hacia grupos de mayor edad.

Palabras clave:

Suicidio, análisis descriptivo, edad de mayor vulnerabilidad, ajuste de mínimos cuadrados.

— Abstract—

In recent years, the number of suicides in Mexico has shown an upward trend, affecting age groups ranging from 10 to more than 85 years. However, it is important to note that there are certain age groups where suicides occur more frequently. Thus, this article presents a quantitative description of the suicides that occurred in Mexico by age group, using approximations to adjust a functional dependence of suicide deaths with respect to age, for the period 2017-2022, and thus obtain an estimation of highest occurrence age of suicides in the coming years. As part of the study, relationship between suicide and the COVID-19 phenomenon that occurred within the analyzed time interval is explored. Results indicate a gradual increase in the age of greatest vulnerability to suicide, going from 22.37 years in 2017 to 25.19 years in 2022. Projections suggest that suicide risk is shifting toward older age groups.

Keywords:

Suicide, descriptive analysis, most vulnerable age, least squares fitting.

El suicidio es una conducta propia del ser humano presente a lo largo de su historia, que se define como el acto deliberado de quitarse la propia vida, ya sea por acción u omisión (Casas et al., 2024). Este proceso suele comenzar con la ideación, avanzar hacia la intención y culminar con la consumación (Pabón, 2021; Rangel y Jurado, 2022). El suicidio afecta a ambos sexos y a todas las clases sociales, variando según las características culturales y la estructura socioeconómica (Corona et al., 2016), siendo la mortandad por suicidio mayor en hombres, y la ideación y el intento más frecuente en mujeres (Valdez et al., 2023). En el mismo sentido, Hernández y Flores (2011) destacan que, aunque la modernización ha reducido para algunas patologías sociales como el homicidio, el suicidio ha incrementado su incidencia como causa de muerte, alcanzando cifras equiparables en países como México.

En cuanto a sus causas, al tratarse de un fenómeno multifactorial, se identifican diversos factores asociados. Por ejemplo, Campillo y Fajardo (2021) afirman que la mayoría de las personas con conductas suicidas padecen o han padecido algún trastorno mental, mientras para el caso particular de los adolescentes, Vázquez et al. (2021) señalan a la dinámica familiar, el estado de salud y los malos hábitos como predictores del aumento de riesgo de suicidio.

En relación con las cifras sobre el suicidio, la Organización Mundial de la Salud reporta que cada año se registran más de 700 000 casos en el mundo (OMS, 2023). De acuerdo con el Instituto Nacional de Estadística y Geografía, en México la tasa de suicidio ha mostrado un incremento sostenido, siendo los grupos de 20 a 24, 25 a 29 y 30 a 34 años los que presentan las mayores tasas con 10.6, 11.6 y 11.0 por cada 100 000 habitantes, respectivamente (INEGI, 2023). Estos datos identifican a las edades comprendidas en dicho intervalo como las de mayor vulnerabilidad al suicidio, constituyendo un punto de partida para el estudio de este fenómeno.

En perspectiva histórica, hasta 2007 en México las tasas de suicidios sin distinción de género eran más elevadas en los grupos de 15 a 34 años, y presentaban una disminución en los grupos de edad media, volviéndose a incrementar a partir de los 65 años (Borges et al., 2010).

Respecto a los intentos de suicidio, existen casos que no son diagnosticados ni registrados como tales (Barón, 2000). Asimismo, en algunos países donde no se dispone de registros confiables, las muertes por suicidio suelen clasificarse erróneamente bajo otras causas (Corona et al., 2016). En este sentido, aunque las estadísticas de organismos gubernamentales proveen un panorama de la ocurrencia de suicidios, no es posible inferir de manera directa un comportamiento histórico de estos estadísticos, que provea de información para la toma de decisiones.

Así, en este artículo se presenta una descripción cuantitativa de la muerte por suicidio en México, a partir de la estimación de la edad de mayor vulnerabilidad. Haciendo uso de las estadísticas de defunciones por suicidio, se hace uso de aproximaciones funcionales mediante el ajuste por mínimos cuadrados, para describir la ocurrencia de suicidios de 2017 a 2022, y la tendencia de la edad de

mayor vulnerabilidad para los próximos años. Como parte de este estudio, se explora la relación del suicidio con el fenómeno de la COVID-19 ocurrido dentro del intervalo de tiempo analizado.

DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA MEDIANTE APROXIMACIONES FUNCIONALES

La descripción cuantitativa de fenómenos de cualquier naturaleza conlleva una obtención finita de datos del mismo, lo que implica realizar inferencias sobre los datos faltantes o hacer predicciones sobre el comportamiento de los mismos. Esta descripción utiliza medidas numéricas, así como expresiones gráficas, para lograr resumir con la mayor fidelidad posible aquellas características que identifican un conjunto de observaciones (Contento, 2019).

En este sentido, un enfoque particular de la aproximación de funciones corresponde al de construir una función a partir de un número dado de valores conocidos considerados exactos o a ajustar una dependencia funcional que mejor represente, en cierto sentido, una nube de puntos (Vázquez et al., 2009). Las técnicas clásicas para afrontar la aproximación funcional son la interpolación mediante polinomios y el ajuste de mínimos cuadrados. En el caso de la interpolación, dados determinados puntos, se desea obtener una función que pase por esos puntos, con el objetivo de evaluarla en otros valores intermedios. En el caso complementario, existen ocasiones en que se desea obtener una función que "sirva" para todos los puntos, esto es, una función que, aunque no pase por todos los puntos, pase relativamente cerca de todos, siendo este el enfoque de la aproximación por mínimos cuadrados (Mora, 2014), y el cual es usado en el presente estudio para modelar y predecir la relación entre la edad y la ocurrencia de suicidios, en el contexto particular de México.

MATERIALES Y MÉTODOS

Bajo un método descriptivo, el estudio presentó las siguientes etapas: recolección de datos, caracterización de la información y análisis. A continuación, se describen las dos primeras etapas.

Recolección de datos

Los datos empleados fueron obtenidos del banco de indicadores del INEGI, disponibles a través del sitio web https://www.inegi.org.mx/temas/salud/. En la Figura 1 se presentan, a través de un gráfico de columnas apiladas, las estadísticas de defunciones por suicidio en México de 2017 a 2022 por grupo de edad. En el caso de los datos del año 2023, al momento de la realización del presente estudio, son de tipo preliminar, por lo que no son considerados como fuente de información.

Como se observa, el suicidio se incrementa con la edad hasta el grupo de 20 a 24 años, decreciendo posteriormente, lo que coincide con estudios en otros países de Latinoamérica (Tuesca y Navarro, 2003). En el mismo sentido, es posible identificar a los años 2019, 2020 y 2021 como los de mayor frecuencia, correspondientes en el estadístico a 7223, 7896 y 8432 defunciones, respectivamente. Sobre esta observación, estudios como los de Guil (2023) y Yan et al. (2023) señalan un aumento en los factores de riesgo de suicidio durante este periodo correspondiente a la pandemia por COVID-19, marcando un hito de cambio en las conductas suicidas, lo que particularmente para el caso de países como México se tradujo en un aumento en el número de suicidios (Martínez Alés et al., 2023; Valle-Palomino et al., 2023). Para fines del tratamiento de esta información, no se consideraron los datos relacionados con el grupo de 5 a 9 años, toda vez que hasta 2022 el número de casos de suicidio se mantenía en cero. De igual manera, los casos con edad no especificada quedan fuera del estudio.

Por otra parte, una mención particular la tiene el año 2022, el cual se ubica como el año con menor número de defunciones dentro del intervalo analizado, con un total de 8239, lo que sugiere un cambio en la tendencia, que de 2017 a 2019 se presentaba como ascendente.

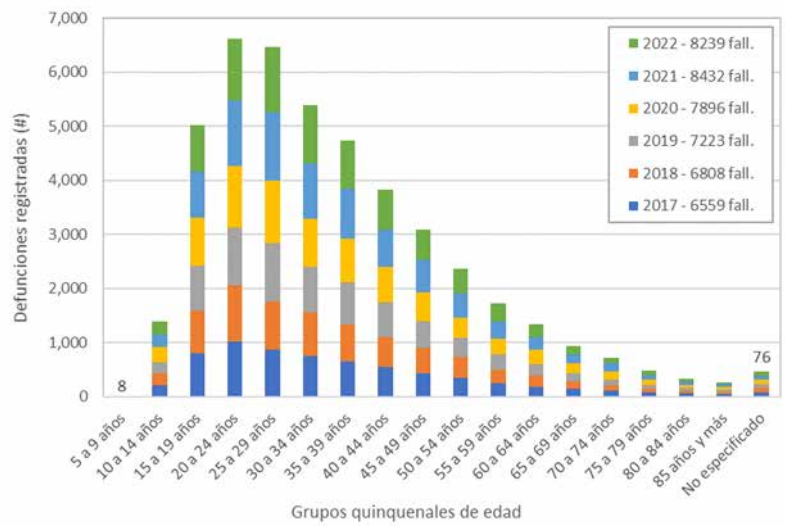


Figura 1. Defunciones registradas por el INEGI por grupos quinquenales de edad, de 2017 a 2022

Caracterización de la información

Con el objeto de extraer características de los datos colectados, se realizó un ajuste mediante mínimos cuadrados, considerando el punto medio de cada intervalo, a través de una regresión polinómica de cuarto orden, implementada en la plataforma de programación y cálculo numérico Matlab®, que permitiera identificar la edad de mayor ocurrencia de suicidios. En este sentido, y en correspondencia con

la variación observada en la recolección de datos, se realizó una segmentación de los datos por tercias de años, anteriores y posteriores a la pandemia por COVID-19, con el objeto de contrastar las curvas de aproximación generadas.

En la Figura 2 y 3 se muestran los datos y las curvas obtenidos de la regresión polinómica, para las dos tercias de años 2017-2019 y 2020-2022.

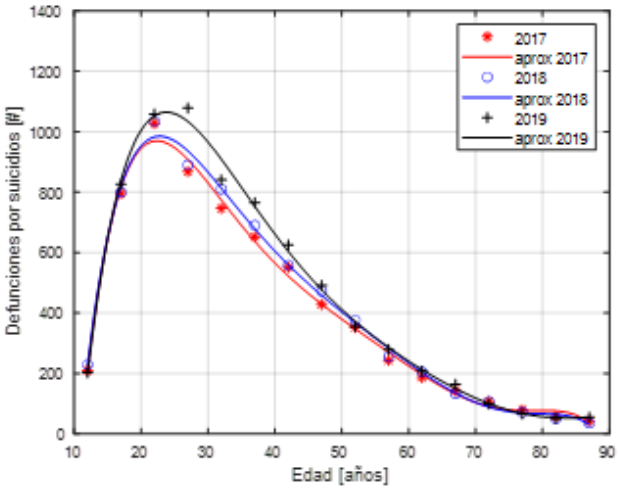


Figura 2. Aproximación de defunciones registradas en México de 2017 a 2019

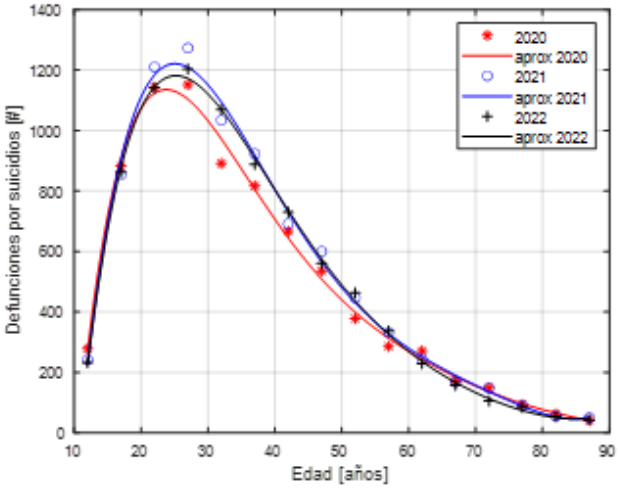


Figura 3. Aproximación de defunciones registradas en México de 2020 a 2021.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como se observa en las Figuras 2 y 3, las curvas de aproximación presentan comportamientos equiparables, con una mayor incidencia de suicidios para las edades entre 20 a 24 y 25 a 29 años. Esta descripción coincide con la retrospectiva de

Borges et al. (2010) para el periodo de 1970 a 2007, en la cual se reporta una estabilidad en la ocurrencia de suicidios entre grupos de menor edad; no obstante, difiere en lo referente al incremento registrado en los grupos de mayor edad. A partir de estas observaciones, y considerando la ocurrencia del fenómeno de la COVID-19 dentro del intervalo de tiempo analizado, no es posible establecer algún tipo de relación entre la muerte por suicidio y la pandemia.

A partir del valor máximo de las curvas generadas, se identificó para cada año la edad de mayor ocurrencia de suicidios. En la Figura 4 se presenta la correspondencia de edad y ocurrencia de suicidios por año, a partir de las aproximaciones funcionales realizadas. Como se observa, existe una tendencia ascendente en la edad de vulnerabilidad, pasando de 22.37 años en 2017 a 25.19 años en 2022, no obstante la disminución en el número de suicidios para 2022.

Una vez obtenidos los pares ordenados de la Figura 4, se realizó un nuevo ajuste mediante mínimos cuadrados para cada ordenada, a través de una regresión lineal, con el objeto de generar una tendencia de la edad de mayor ocurrencia de suicidios y el número de defunciones correspondiente al año 2030.

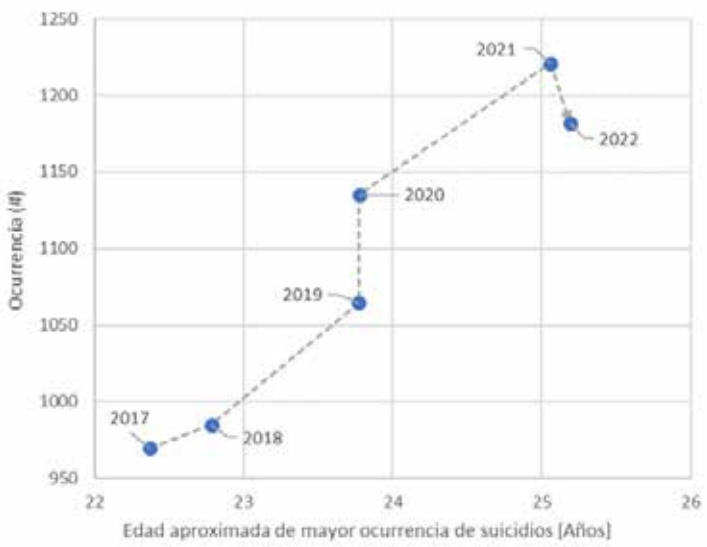


Figura 4. Aproximación de la edad de mayor ocurrencia de suicidios de 2017 a 2022

En la Figura 5, se presentan las curvas de tendencia obtenidas de la regresión lineal tanto para la edad de mayor vulnerabilidad como para su ocurrencia. Bajo las rectas aproximadas, se estima que para 2030 la edad de mayor ocurrencia de suicidios sea 30.25 años, con un registro de 1,645 defunciones.

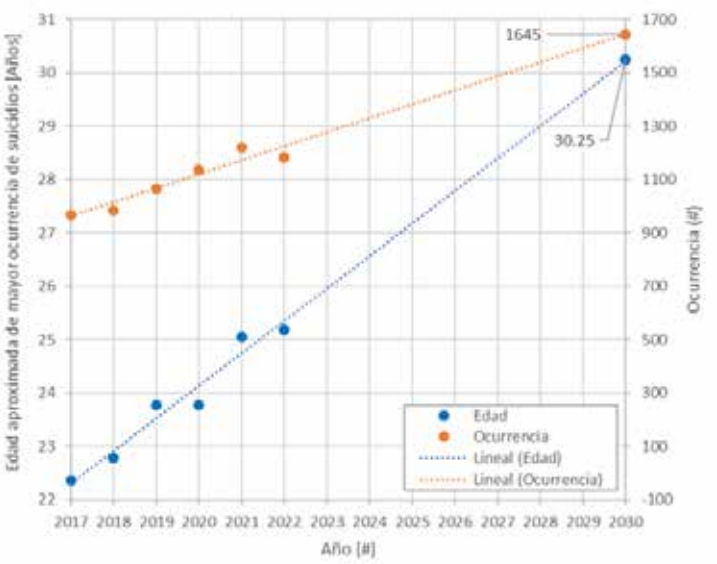


Figura 5. Tendencia de la edad de mayor vulnerabilidad y ocurrencia de suicidios a 2030

Por otra parte, desde una visión reflexiva de los estadísticos, no es posible establecer una correlación entre las muertes por suicidio y la pandemia de COVID-19, toda vez que la dinámica del suicidio por grupo por edad en México no manifiesta cambios significativos, más allá del aumento paulatino en el número de suicidios que en retrospectiva viene sucediendo en el país, mucho antes de esta emergencia sanitaria, lo que concuerda con observaciones realizadas por otros estudios (Yan et al., 2023; Barlattani et al., 2023). Sin embargo, es de mencionar que investigaciones enfocadas en la relación entre el suicidio y la pandemia sí señalan un aumento en la ideación e intentos de suicidio, sin ser concluyentes para el caso de las defunciones (Sacco et al., 2023; Martínez-Alés et al., 2023).

CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó la descripción de la muerte por suicidio en México, a partir de una aproximación funcional de la conducta, que relaciona la edad con el número de defunciones. Los hallazgos de este estudio sugieren una permanencia en la dinámica del suicidio en México, con ligeros cambios para los grupos de edad mayor, siendo aún la población de entre 15 y 34 años la más susceptible. No obstante, se observa una tendencia ascendente en la edad de mayor frecuencia de suicidios, con una estimación alrededor de los 30 años para 2030.

Finalmente, los resultados presentados sugieren un desplazamiento del riesgo de suicidio hacia grupos de mayor edad, lo cual podría dar indicios de un foco de atención para los programas gubernamentales de prevención, así como la propia concientización de la población sobre el estado que aguarda un problema que no debe ser ajeno a ningún miembro de la sociedad. A manera de seguir explorando la

problemática, se plantea como trabajo futuro, un estudio enfocado en las regiones del país, con el objeto de identificar particularidades de la muerte por suicidio en diversos contextos socioeconómicos, que de acuerdo a la literatura pueden modificar la conducta suicida en sí misma.

REFERENCIAS

Barlattani1, T., D'Amelio, C., Capelli, F., Mantenuto, S., Rossi, R., Socci, V., Stratta, P., Di Stefano, R., Rossi, A., y Pacitti, F. (2023). Suicide and COVID-19: a rapid scoping review. *Annals of General Psychiatry, 22*, 10. https://doi.org/10.1186/s12991-023-00441-6

Barón, O. P. (2000). Adolescencia y suicidio. *Psicología desde el Caribe, 6*, 48-69. https://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/psicologia/article/view/765

Borges, G., Orozco, R., Benjet, C., y Medina, M. E. (2010). Suicidio y conductas suicidas en México: retrospectiva y situación actual. *Salud Pública de México, 52*(4), 292-304. https://www.saludpublica.mx/index.php/spm/article/view/6979

Campillo, C., y Fajardo, G. (2021). Prevención del suicidio y la conducta suicida. *Gaceta Médica de México, 157*, 157,564-569. https://doi.org/10.24875/GMM.21000205

Casas, A., Velasco, Á. E., Rodríguez, A., Prado, E., y Álvarez, M. G. (2024). Conducta suicida en adolescentes mexicanos: análisis comparativo entre regiones geográficas del país. *Acta Pediátrica de México, 45*(1S), S47-S53. https://doi.org/10.18233/apm.v45i1S.2849

Contento, M. R. (2019). *Estadística con aplicaciones en R.* Editorial UTADEO.

Corona, B., Hernández, M., y García, R. M. (2016). Mortalidad por suicidio, factores de riesgo y protectores. *Revista Habanera de Ciencias Médicas, 15*(1), 90-100. https://revhabanera.sld.cu/index.php/rhab/article/view/1070

Guil, J. (2023). Intento de suicidio antes y durante la pandemia de COVID-19 Estudio comparativo desde el servicio de urgencias. *Medicina de Familia - SEMERGEN, 49*(3), 101922. https://doi.org/10.1016/j.semerg.2023.101922

Hernández, H. H., y Flores, R. (2011). El suicidio en México. *Papeles de Población, 17*(68), 69-101. https://rppoblacion.uaemex.mx/article/view/8470

INEGI (2023). *Comunicado de prensa Núm. 542/23, Día Mundial para la Prevención del Suicidio.* Instituto Nacional de Estadística y Geografía.

Martínez-Alés, G., Szmulewicz, A., López-Cuadrado, T., Morrison, C. N., Keyes, K. M., y Susser, E. S. (2023). Suicide Following the COVID-19 Pandemic Outbreak: Variation Across Place, Over Time, and Across Sociodemographic

Groups. A Systematic Integrative Review. *Current Psychiatry Reports, 25*, 283-300. https://doi.org/10.1007/s11920-023-01427-7

Mora, H. M. (2014). *Métodos numéricos con SCILAB*. Ediciones Universidad Central.

OMS (2023). *Día Mundial para la Prevención del Suicidio 2023*. Organización Mundial de la Salud. https://www.who.int/es/campaigns/world-suicide-prevention-day/2023

Pabón, A. Y. (2021). Intentos de suicidio y trastornos mentales. *Revista Habanera de Ciencias Médicas, 20*(4), e3967. https://revhabanera.sld.cu/index.php/rhab/article/view/3967/2919

Rangel, J. N., y Jurado, S. (2022). Definición de suicidio y de los pensamientos y conductas relacionadas con el mismo: una revisión. *Psicología y Salud, 32* (1), 39-48. https://doi.org/10.25009/pys.v32i1.2709

Sacco, M., Gualtieri, S., Ricci, P. y Aquila, I. (2023). The Risk of Suicide in the Post-COVID-19 Emergency Era: Psychological and Forensic Implications. *Cureus, 15*(11), e49081. https://doi.org/10.7759/cureus.49081

Tuesca, R., y Navarro, E. (2003). Factores de riesgo asociados al suicidio e intento de suicidio. *Salud Uninorte, 17*, 19-28. https://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/salud/article/view/4165/5613

Valdez, R., Villalobos, A., Arenas, L., Benjet, C. y Vázquez, A. (2023). Conducta suicida en México: análisis comparativo entre población adolescente y adulta. *Salud Pública de México, 65*(1), s110-s116. https://doi.org/10.21149/14815

Valle-Palomino, N., Fernández-Mantilla, M. M., Talledo-Sebedón, D. d. L., Guzmán-González, O. V., Carguachinchay-Huanca, V. H., Sosa-Lizama, A. A., Orlandini-Valle, B., y Vela-Miranda, Ó. M. (2023). Suicidal Ideation and Death by Suicide as a Result of the COVID-19 Pandemic in Spanish-Speaking Countries: Systematic Review. *Journal of Clinical Medicine, 12*(21), 6700. https://doi.org/10.3390/jcm12216700

Vázquez, L., Jiménez, S., Aguirre, C., y Pascual, P. J. (2009). *Métodos numéricos para la física y la ingeniería*. McGraw Hill.

Yan Y, Hou J, Li Q, y Yu N. X. (2023). Suicide before and during the COVID-19 Pandemic: A Systematic Review with Meta-Analysis. *International Journal of Environmental Research and Public Health, 20*(4), 3346. https://doi.org/10.3390/ijerph20043346